АБ. Василмский

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВНЕКЛАССНОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

А. Б. Василевский

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВНЕКЛАССНОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

9–11 КЛАССЫ

КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Минск
«Народная асвета»
1988

ББК74.262
В19
УДК51 (072.3)

Рецензенты:
Н. М. Рогановский, канд. пед. наук,
М. З. Каплан, канд. пед. наук.

Василевский А. Б.
В19 Задания для внеклассной работы по математике: 9—11-е кл. Кн. для учителя.— Мн.: Нар. асвета, 1988.—175 с.: ил.— ISBN 5-341-00023-4.

Задания построены так, что учащиеся могут самостоятельно находить решения нестандартных математических задач, широко применяя имеющуюся в школе вычислительную технику. Книга может быть использована учителем в кружковой работе, при проведении факультативных занятий и подготовке школьников к олимпиадам.

4306010000—137
В-------------------------23—88 ББК74.262
М 303(03)—88

ISBN 5-341-00023-4

ВВЕДЕНИЕ

Внеклассная работа по математике предоставляет учащимся дополнительные возможности для развития способностей, прививает интерес к науке математике. Главное назначение внеклассной работы — не только расширение и углубление теоретического материала, изученного на уроках, но и развитие умений применять полученные на уроках знания к решению нестандартных задач, воспитание у школьников определенной культуры работы над задачей.

В данном пособии излагаются общие методы решения задач школьного курса математики и приемы поиска применения этих методов.

Наличие в книге нескольких решений одной и той же задачи поможет учителю организовать как коллективную, так и индивидуальную работу над задачами. Главным средством для этого является создание проблемной ситуации.

Методы решения задач не просто излагаются, а показывается, как нужно рассуждать, чтобы уяснить, каким образом можно придти именно к данному методу решения задачи. В книге много внимания уделяется вопросу развития интуиции на рабочую гипотезу, а затем разрешению ее.

В настоящее время в учебном процессе находят все более широкое применение микрокалькуляторы. Они позволяют освободить учащихся от однообразной вычислительной работы и уделить больше внимания самому алгоритму вычислений. Появляется возможность решать задачи с реальными числовыми данными, Выполнение таких заданий делает вычислительную работу учащихся более целенаправленной и содержательной, способствует повышению интереса к математике и создает возможности для более успешного применения расчетов на практике.

Высокая точность и быстрота вычислений позволяет широко и систематически использовать в учебном процессе математический эксперимент для активизации познавательной деятельности учащихся. Появляется возможность знакомить учащихся с достаточно общими методами поиска и обоснования решений сложных нестандартных задач. Рассмотрение таких задач на внеклассных занятиях без использования программируемых микрокалькуляторов методически неоправдано, потому что их решение сильно затруднено, а в ряде случаев невозможно. Программируемые микрокалькуляторы помогают на более высоком методическом уровне организовать индивидуальную и коллективную работу учащихся. Микрокалькулятор является надежным и удобным средством поэтапного контроля правильности тождественных преобразований выражений с переменными.

В книге на конкретных примерах показывается, как эффективно использовать микрокалькулятор при поиске решений различных задач по математике. Коренным образом меняется методика поиска решений следующих задач: тождественное преобразование громоздких числовых выражений и выражений с переменными; разложение выражений со многими переменными на множители; поиск и обоснование свойств различных числовых множеств; делимость чисел; исследование функций, построение и применение их графиков; исследование решений уравнений и неравенств и их систем;' решение нестандартных уравнений и неравенств; доказательство нестандартных неравенств; исследование решений геометрических задач; анализ таблиц значений функции с целью получения правдоподобных гипотез о их свойствах.

Пособие состоит из 16 тем (заданий). При решении задач каждого задания используются в комплексе различные методы. Например, при решении уравнений и неравенств используются графические приемы. В то же время при рассмотрении геометрических задач широко применяются аналитические методы, в результате чего существенной частью работы над геометрической задачей является решение уравнений. Такой подход позволяет формировать у учащихся представление о том, что различные разделы школьной математики взаимно связаны, являются ее неразрывными частями.

Функциональный метод является основным не только при решении уравнений и неравенств, но и при работе над геометрическими задачами. Этот метод целесообразно использовать при работе над всеми задачами данного пособия.

При расположении заданий учитывалась их сложность и теоретическая подготовка учащихся соответствующего класса, а также навыки в поиске решения задач.

В заданиях 1—4 рассматриваются преобразования числовых выражений, делимость чисел, решения уравнений и неравенств в целых числах, разложение многочленов на множители.

Тождественные преобразования выражений с переменными могут выполняться с различными целями: приведение выражения к виду, удобному для нахождения его наименьшего и наибольшего значения или установления монотонности соответствующей функции-получение выражения, которое позволяет составить достаточно простую программу для вычисления его значения на микрокалькуляторе; получение выражения, удобного для контроля правильности тождественных преобразований, и т. д.

На уроках математики изучается ограниченный круг свойств рациональных чисел. Сложность большинства задач на доказательство числовых свойств как раз и объясняется тем, что приступая к их решению, ученик мало знает о свойствах рассматриваемых чисел. Поэтому работу над такими задачами целесообразно проводить следующим образом: исследуется несколько частных случаев общей задачи с тем, чтобы подметить некоторые свойства рассматриваемых чисел, затем доказываются или опровергаются эти свойства; если обнаруженных и доказанных свойств чисел оказывается недостаточно для решения задачи в полном объеме, то продолжается рассмотрение других частных случаев до тех пор, пока не подмечается какое-то новое свойство чисел.

В процессе решения таких задач учащиеся составляют и анализируют различные таблицы, что имеет политехническую ценность. В этой работе широкое применение находит микрокалькулятор. Чтобы составление таблиц не отнимало много времени, учащиеся делятся на несколько подгрупп. Каждая подгруппа составляет свою часть общей таблицы. Анализ всей таблицы учащиеся выполняют под руководством учителя. При решении таких задач широко используется метод полной индукции.

Огромная обучающая ценность задач на обнаружение и доказательство свойств чисел заключается в том, что в процессе работы над ними ученик приобретает навыки в расчленении сложной задачи на более простые, выдвигает правдоподобные гипотезы, доказывает или опровергает их, занимается обобщением *ш* конкретизацией, т. е. приобретает навыки научного поиска.

Задание 5 посвящено задачам по планиметрии, в большинстве из них рассматривается изменение геометрических величин.

При решении таких задач осуществляется естественная связь между конструктивными методами и методами математического анализа. Все эти задачи, как правило, решаются на основе широкого применения свойств функций, с которыми знакомятся учащиеся на уроках алгебры и начал анализа.

Геометрические задачи могут содержать либо только числовые данные, либо числовые данные и параметры, либо только параметры. В зависимости от этого одна и та же задача может быть трудной или простой. Системное использование инструментальных построений, измерений и вычислений содействует приобретению навыков открытия правдоподобных свойств фигуры, их анализа, обобщения и применения к решению задач.

Решение многих геометрических задач можно свести к исследованию рациональных, иррациональных, тригонометрических уравнений и их систем. Такой подход к решению геометрической задачи позволяет: 1) организовать систематическое повторение изученного в школе материала с помощью решения задач; 2) постепенно углублять понимание учащимися математических методов; 3) формировать у них навыки комплексного использования различных идей и методов; 4) широко применять микрокалькулятор.

Существенным элементом поиска решения геометрической задачи является установление числа ее решений. Если удается это сделать еще на этапе усвоения задачи, то серьезно упрощается составление плана ее решения и реализация этого плана. Эффективйость такого подхода показывается при рассмотрении многих задач данного задания.

В задании 5 используются следующие методы решения геометрических задач:

1) Метод координат упрощает поиск решения задачи по геометрии. Чаще всего используются уравнения прямой и окружности, формула длины отрезка, условие перпендикулярности двух прямых. Объем вычислений зависит от того, насколько удачно расположена исследуемая фигура относительно системы координат.

2) Алгебраический метод решения геометрических задач заключается в следующем. Искомые элементы геометрических фигур обозначают через x, y, ... По условию задачи составляются уравнения (неравенства), связывающие известные и неизвестные элементы фигур. После этого решается полученная система уравнений (неравенств). Определяются те элементы или отношения между ними, которые требуется найти. Такое решение геометрических задач является одним из наиболее простых (в идейном отношении). Удачный выбор неизвестных позволяет получить несложную систему уравнений (неравенств).

Теперь сформулируем основные положения методики обучения учащихся поиску решений геометрических задач.

Начинать поиск решения геометрической задачи на вычисление следует с инструментального построения фигуры, которая соответствует всем условиям задачи. Такой чертеж позволяет выполнить измерения элементов изображения и высказать правдоподобные гипотезы о некоторых свойствах фигуры. В ряде случаев приближенный ответ дает возможность догадаться о его точном значении, и, значит, избежать вычислительных и логических ошибок. Во многих случаях наличие ответа существенно облегчает поиск плана решения задачи. Предварительное решение задачи на вычисление построением позволяет установить число решений.

Поиск решения задачи на доказательство можно расчленить на следующие виды работы: выполнение чертежа, отвечающего всем условиям задачи; инструментальный поиск свойств фигуры (получаем гипотезы); доказательство справедливости или ложности этих гипотез (в затруднительных случаях доказательство целесообразно вести методом полной индукции); применение всех или части обнаруженных и обоснованных свойств фигуры *к* доказательству сформулированного в задаче свойства этой фигуры.

Поиск решения конструктивной задачи с помощью циркуля и линейки состоит из следующих этапов: построение фигуры, отвечающей всем условиям задачи: обнаружение неизвестных свойств этой фигуры, отвечающей всем условиям задачи; доказательство истинности или ложности их; построение геометрических мест точек, пересечения которых могут быть решением задачи, и установление их свойств; отыскание пути решения задачи при помощи обнаруженных и доказанных свойств фигуры.

Задания 6—10 и 14 посвящены рассмотрению уравнений и неравенств. Нетрадиционные подходы к решению уравнений и неравенств, к исследованию решений уравнений и неравенств, к построению их графиков позволяют сформировать у учащихся достаточно общий взгляд на эту большую группу нестандартных задач. Для решения уравнений и неравенств применяются различные методы в комплексе. Главное здесь — использование в максимальной степени свойств соответствующих функций. При поиске и проверке решений используется микрокалькулятор.

Традиционный для школы путь алгебраического решения уравнения заключается в том, что при помощи тождественных преобразований выражений с переменными заменяют его более простым уравнением. Например, уравнение с одной переменной мы заменяем уравнением, для решения которого существует формула. В результате получаем ответ, «точный» с точки зрения классической элементарной математики.

Из так называемых общих методов решения уравнений в школе чаще других используют разложение левой части уравнений $F(A:) = 0$ на множители или замену переменных. Изучается и много частных приемов, которые позволяют найти корень уравнения как число или комбинацию каких-то функций от параметров. Однако далеко не все уравнения, которые дает практика, можно решать таким образом. Но и тогда, когда уравнение решается (в традиционном школьном понимании) формула для его корня может оказаться достаточно громоздкой. Например, уравнение $\sin^{3*}$ — — $\cos^{3*} = 0{,}008$ имеет единственный дробный положительный корень xo= 0,78916943 (получен на микрокалькуляторе). Этот результат практически гораздо полезнее, чем точная формула, выражающая этот корень: $*_0$ = 0,25д + arcsin(^/2sin (-i-arcsin0,008)) (все

равно мы можем получить только приближенное значение $*_0$). Да и в общеобразовательном плане привычные для учителя решения этого уравнения проигрывают в сравнении с его «функциональным» решением. Для подтверждения этой мысли приведем два решения этого уравнения.

1) Функция *F(x)* = sin^{3*} — cos^{3*} возрастает на (0;0,5л). Это утверждение основано на теореме о производной сложной функции и теореме о сумме двух возрастающих функций. ^(0) <С 0,008; ^(0,5^) > 0,008. Отсюда ясно, что уравнение *F(x)* — 0,008 имеет единственный корень, принадлежащий (0;0,5л). При помощи микрокалькулятора (методом деления отрезка пополам) быстро получаем *о = 0,78916943.

2) Из свойств функций синуса и косинуса вытекает: |sin* — cos*| ^ 2 (это верное неравенство, но как додуматься, что именно с этого следует начинать решение задачи?). Отсюда ясно, что существует такой угол а, что sin* — cos* = 2sina (сделан еще один удар по престижу бытующей в школьной практике методики обучения решению задач!). Тогда sin^{2*} + cos^{2*} — 2sin*cos* = = 4sin^{2}a (еще один ход в пользу тех учеников, которые утверждают, что математика — это неупорядоченное множество теорем, формул и их непредсказуемых преобразований). Откуда 1 + sin*cos* = 0,5(3 — 4sin^{2}a) (и до этого преобразования даже отлично успевающему ученику додуматься непросто!). Так как угол а всегда можно взять в первой четверти (решающий должен догадаться, что именно здесь следует вспомнить, что *о > 0,25л), то получаем sin* — cos* =

= 2 sin (— arcsin 0,008). Решив это уравнение, получаем

названный выше ответ.

Ясно, что искусственные приемы, примененные во втором решении, могут только оттолкнуть ученика от занятий математикой.

Преувеличенное внимание в школе к уравнениям, решение которых оканчивается получением «точной» формулы их корней, неизбежно ведет к отрыву теории от практики, резко снижает образовательные и политехнические возможности школьного курса алгебры и начал анализа. Выпускник средней школы, воспитанный на «точных» равенствах, на целых и рациональных корнях уравнений (в крайнем случае, выраженных радикалами), получаемых в результате даже очень головоломных нестандартных тождественных преобразований выражений с переменными, часто не может верно решить даже квадратное уравнение, если его коэффициенты получены в результате инструментальных измерений.

Традиционный школьный подход к вопросу о решении уравнений не формирует функциональное мышление ученика. И, как следствие этого, учащийся, самостоятельно получивший формулу $*_0$ ="0,25л+

+ arcsin(V2 (yarcsin 0,008)), не может, как правило,

решить более простую задачу: «Сравнить дробные положительные корни уравнений sin *— $\cos^{3*}$ = 0,008 и $2\sin^{3*}$ — $\cos^{3*}$ = 0,008».

Сегодня, когда в школу пришли информатика и вычислительная техника, появились широкие возможности в формировании функционального мышления учащихся в процессе изучения уравнений. Систематическое применение микрокалькуляторов при работе над уравнениями коренным образом изменяет ее обучающее содержание. Вообще, серьезный политехнический подход к решению уравнений в школе практически можно реализовать только с помощью микрокалькулятора. Он позволяет не только упростить и ускорить вычислительную работу, получить корни уравнений достаточно высокой точности, но и формировать у учащихся навыки составления таблиц функций с определенной целью, навыки поиска, обнаружения и доказательства свойств уравнений путем анализа этих таблиц.

С помощью микрокалькулятора можно находить «точные» (с точки зрения элементарной математики) целые корни уравнений и в большинстве случаев рациональные корни и корни, выраженные радикалами (имеются в виду уравнения, содержащиеся в современных школьных учебниках и в различных сборниках конкурсных и олимпиадных задач). Главное в том, что микрокалькулятор дает возможность применять при решении самых различных уравнений общий функциональный подход, основанный на систематическом комплексном использовании свойств всех функций, изучаемых в школе. При таком подходе к работе над уравнениями у учащихся формируется не только общий метод их решения, но и происходит углубленное повторение важнейших свойств изученных ими ранее функций. Последнее является самым существенным в методике обучения учащихся решению уравнений. Во всех отношениях (и с дидактической, и с практической точек зрения) более ценным является умение отделить корень уравнения и найти с нужной точностью его приближенное значение, чем головоломные упражнения в поисках его «точных» корней.

Задача на определение корней любого уравнения $F(x)$ — 0, решаемая с применением микрокалькулятора, состоит из следующих наиболее типичных подзадач (всех или только некоторой части из них): установление области определения $D(F)$ функции $F(x)$; определение тех промежутков из $D(F)$, которым не могут принадле жать корни уравнения $F(x) =$ О (без применения производной); доказательство монотонности функции $F(x)$ на $D(F)$ или только на некоторых промежутках, принадлежащих $D(F)$ (без применения производной); обоснование непрерывности функции $F(x)$; установление, в каких пределах изменяется функция $F(x)$ на $D(F)$ или на отдельных промежутках, принадлежащих $D(F)$; решение уравнения $F'(x) =$ О (для определения промежутков монотонности функции $F(x))$| нахождение промежутка, являющегося частью промежутка, на котором верно неравенство $F'(x) > 0$ $\{F'(x) <Z$ 0); преобразование уравнения $F(x) == 0$ к виду $P(x) =.M(x)$, где $P(x)$ и $M\{x)$ — возрастающие или убывающие функции на некотором промежутке, который является частью $D\{F)$| доказательство наравенства $P(x) > M(x)$ $(P(x) <L$ $M(x))$ на этом промежутке при помощи таблиц функций $P(x)$ и $M(x)$-$_9$ доказательство неравенства $F'(x)> M'(x)$ (P'(x)c <$M'(x))$ таким же способом; получение при помощи микрокалькулятора гипотезы о числе корней уравнения и обоснование этой гипотезы; нахождение целых (рациональных) корней уравнения; вычисление корней уравнения, принадлежащих заданному промежутку; доказательство того, что некоторому заданному промежутку не могут принадлежать корни данного уравнения; нахождение приближенных значений корней; получение гипотезы о их свойствах; отыскание формулы для его «точных» корней; составление при помощи инженерных или программируемых микрокалькуляторов (ПМК) таблиц функций, анализ которых позволяет высказать правдоподобные суждения об их свойствах, выбрать целесообразные методы доказательства этих свойств и их применения к нахождению корней соответствующих уравнений; вычисление корней уравнений с точностью, определяемой точностью исходных данных.

Особое место занимают задачи на нахождение бесконечных промежутков, которым не могут принадлежать корни уравнения $F(x) = 0$.

Следует выделить табличный метод, который применяется при доказательстве неравенств *P(x)^M(x)* и *P'{x)* ёЕ *M'{x).* Он позволяет сформировать у учащихся навыки применения простейших свойств непрерывных функций к решению самых разнообразных по содержанию и сложности уравнений и неравенств. Как правило, при этом отпадает необходимость в решении достаточно сложных уравнений *F'(x) — 0.*

Из известных методов уточнения корней уравнения $F(x) = 0$ наиболее доступным для старшеклассников является метод деления отрезка пополам. Он легко реализуется на ПМК.

Возникает естественный вопрос: стоит ли применять функциональный метод решения уравнений в тех случаях, когда неплохо работают традиционные методы? Безусловно, стоит, поскольку взгляд на всякое выражение с переменными как на выражение, задающее какую-то функцию, способствует успешному формированию диалектико-материалистического мировоззрения у учащихся и рациональному применению математической теории.

Микрокалькулятор делает практически универсальным и самым простым при решении неравенств метод интервалов.

Школьники изучают общие свойства непрерывных функций, применение которых в полном объеме позволяет существенным образом упростить поиск решений нестандартных уравнений. В самом деле, девятиклассник знакомится с достаточным условием монотонности функций, с правилами вычисления производных, с производной сложной функции. Отсюда непосредственно вытекают свойства суммы двух возрастающих (убывающих) функций; произведения двух положительных возрастающих (убывающих) функций; свойства сложных функций. Однако при решении уравнений и задач прикладного характера эти важнейшие теоретические знания применения не находят, и поэтому учащимися усваиваются формально. Поясним сказанное примерами:

1) Найти дробные корни уравнения lgx + sinx=^ 1.

Выпускник средней школы знает, что на (0;1) функция *у = |gx* и *у = smx* возрастающие. Но он, как правило, не видит, какое это отношение имеет к решению уравнения.

2) Решить уравнение cos(cosVl — *) Н—~ =

'ПУХ

= 1 + cosl.

На основании теоремы о производной сложной функции ясно, что функция *у* = cos (cosд/1 — *х)* убывающая (функция *у* — \—*x* убывающая, *у = ^Jx* возрастающая, *у* = cos* убывающая). Отсюда понятно, что

функция *F(x)* = cos(cosд/\ — *х)*-\——>определенная на

///

(0; 1], убывающая. Поэтому данное уравнение имеет не более одного корня. Так как T^7(1) = 1 + cos 1, то для решения уравнения не требуется вообще никаких вычислений. Но в школьных учебниках и конкурсных сборниках задач по математике ученик не видит такого применения важнейших общих свойств функций. Поэтому он считает это уравнение очень сложным.

3) Решить уравнение д/777* — 2250 + \/77*3+ 108 = = **6**.

Школьник, не приученный смотреть на уравнение с функциональной точки зрения, эту задачу не решает, даже если он отлично знает все названные выше свойства производной. Естественный подход к этой задаче выглядит следующим образом:

гг Г 750 . ч

Левая часть уравнения определена на [-2^g; + 00).

На этом промежутке непрерывные неотрицательные функции *у = 111 х* — 2250 и *у* — *Их*^{3} + 108 возрастающие. Функции *у = л[х* и *у = л[х* возрастающие. Поэтому и сложные функции *Р(х) =* ~\[*111х* — 2250 и *К(х) =*

= *^J11x*^{3}+ 108 возрастающие. Функция *F(x) = Р{х)* +

+ *К{х)* непрерывная и возрастающая. Поэтому данное уравнение имеет не более одного корня $*_0$. При помощи МК легко находим, что $x_0 = 3$.

У учащихся должна постоянно вырабатываться культура работы с уравнениями. Прежде всего следует выяснить, имеет ли уравнение $F(x) = 0$ корни. В необходимых случаях (для получения гипотезы о существовании корней) составляем таблицу функции $F(x)$ при помощи МК- Дело в том, что доказать, что уравнение /⁷(л;) = 0 не имеет корней часто гораздо проще, чем заниматься его преобразованиями, направленными на вычисление «точных» корней. Полученная таблица функции $F(x)$ облегчает выбор методов уединения корней уравнения $F(x) = 0$, напоминает о существовании свойств функции $F(x)$, на которые без таблицы мы могли бы и не обратить внимания.

Общий план работы над задачей «Решить уравнение $F(x) = 0$»:

1) Находим $D(F)$.

2) Не решая уравнения $F'(x) = 0$, а используя только свойства суммы (произведения) непрерывных монотонных функций и свойства сложных функций, находим некоторые подмножества множества $D(F)_y$ на которых функция $F(x)$ монотонная.

3) При помощи МК проверяем, принадлежат ли этим подмножествам корни уравнения $F(x) = 0$ (некоторые из этих подмножеств можно отыскать преобразованием уравнения $F(x) = 0$ в равносильное ему уравнение или получив все или часть решений неравенств $F'(x) > 0$ (F'(*)<0).

4) Если $D(F)$ включает в себя бесконечный промежуток, то надо определить множество конечных промежутков, которым принадлежат все корни уравнения $F\{x) = 0$.

Следует заметить, что определение корней уравнения $F'(x) = 0$ может оказаться более сложной задачей, чем решение уравнения $F(x) = 0$. Поэтому часто приходится отказываться от мысли отделить корни уравнения $F(x) = 0$ путем нахождения критических точек функции $F(x)$. Во многих случаях отделение корней упрощается с помощью метода «ступенек». Для этого уравнение $F(x) = 0$ преобразуется к виду $P(x) = M(x)(P(x)$ и $M(x)$ — возрастающие или убывающие функции на некотором промежутке). При помощи МК составляются таблицы функций $P(x)$ и $M(x)$, $P'(x)$ и $M'\{x)$ (с достаточно малым шагом). Работа над уравнением завершается уточнением отделенных корней.

Для сравнения традиционного и функционального подхода (с применением МК) к поиску корней уравнений приведем два решения уравнения

$$x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 13x - 9 = 0. \qquad (1)$$

1. Представляем данное уравнение в виде $x^4 + 2x^2 + 1 + 3(x^3 + 2x^2 + x + 2) - 4(x^2 + 4x + 4) = 0$, или $(x^2 + 1)^2 + 3(x^2(x + 2) + (x + 2)) - 4(x + 2)^2 = 0$, или

$$(x^2 + 1)^2 + 3(x + 2)(x^2 + 1) - 4(x + 2)^2 = 0. \qquad (2)$$

Число —2 не является корнем данного уравнения (1). Поэтому разделив обе части уравнения (2) на $(x + 2)^2$, получим уравнение, равносильное уравнению (1):

Отсюда получаем уравнения: $(x^2 + 1):(x + 2) = 1$ и $(x^2 + 1):(x + 2) = -4$. В результате получаем, что корнями уравнения (1) являются $x_1 = 0{,}5(1$ и $x_2 = 0{,}5(1 + \sqrt{5})$.

Решение, конечно, короткое. Но как додуматься до этих неестественных преобразований уравнения (1)?

Совсем другим выглядит путь поиска корней уравнения (1) при помощи микрокалькулятора.

2. Преобразовываем уравнение (1) следующим образом:

$$F(x) = x(x(x(x + 3) + 4) - 13) - 9 = 0.$$

Отсюда ясно, что если $x \geq 2$ или $x \leq -3$, то $F(x) > 0$, т. е. корни уравнения (1) могут принадлежать только интервалу $(-3; 2)$.

При помощи ПМК составляем таблицу:

X	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$F(x)$	66	41	25	14	6	-1,8	-9	—14	—14	-4,3	21

Отсюда ясно, что уравнение (1) имеет не меньше двух действительных корней: $-1 < x_1 < -0{,}5$; $1{,}5 < x_2 < 2$.

После их уточнения имеем: $x_1 \approx -0{,}61804$;

$\approx 1{,}61804$. Отсюда появляется гипотеза, что $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 x_2 = -1$ и

$$x_1 = 0{,}5(1 - \sqrt{5}); \quad x_2 = 0{,}5(1 + \sqrt{5}).$$

Если это так, то левая часть уравнения (1) делится на $x^2 - x - 1$. В самом деле, $x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 13x - 9 = (x^2 - x - 1)(x^2 + 4x + 9) = 0$.

Второй метод поиска корней уравнения (1) применим для решения любого уравнения с одной переменной. И в этом его высокая обучающая ценность. Первое же решение напоминает разгадывание кроссворда.

Задание 11 посвящено методу параллельных проекций. Сущность этого метода решения геометрических задач заключается в специальном выборе направления проектирования. При решении многих аффинных задач стереометрии выгодно направление проектирования выбрать так, чтобы некоторые прямые изображались точками, некоторые плоскости — прямыми, а произвольные треугольники — правильными треугольниками.

Метод параллельных проекций основывается только на тех свойствах параллельных проекций, которые изучаются в школе. В частности, широко используется возможность изображать любой треугольник любым треугольником и любую треугольную пирамиду — всяким полным четырехугольником. Это позволяет свести исследование многих отношений между элементами произвольных геометрических объектов к доказательству соответствующих свойств достаточно простых плоских и трехмерных фигур. Например, установление многих свойств треугольной пирамиды существенно упрощается, если считать ее изображением квадрата (вместе с его диагоналями).

Представленная в теме система задач и их решений позволяет углубить связи между планиметрией и стереометрией, развивает пространственное воображение учащихся, расширяет их представление о методах решения задач, развивает конструктивные и комбинаторные способности учащихся.

При помощи системы геометрических задач, представленных в задании 12, формируются у учащихся навыки применения векторов к их решению. При этом используется следующая методика векторного решения задач: условие задачи переводится на язык векторов, т. е. составляется система векторных уравнений по условию задачи; выбираются базисные векторы; все введенные в рассмотрение векторы раскладываются по базисным векторам; упрощается система векторных уравнении; векторные уравнения заменяются алгебраическими (на основании единственности разложения вектора по базисным векторам); решается система алгебраических уравнений; объясняется геометрический смысл полученного решения этой системы.

В задании 13 помещены только четыре задачи (о свойствах сечений куба и треугольной пирамиды). Но их рассмотрение с учащимися имеет принципиальное значение. Они позволяют ознакомить старшеклассников с одним из наиболее общих приемов поиска решения сложной задачи — расчленение ее на ряд целесообразных подзадач.

Задания 15 и 16 посвящены задачам по стереометрии на построение, доказательство и вычисление. Эти задачи по своей идейной нагрузке занимают особое место в школьном курсе математики. Их содержание и используемые методы решения позволяют в комплексе применять знания, умения, навыки учащихся по алгебре, тригонометрии, планиметрии, стереометрии, началам анализа.

Работа над задачей по стереометрии строится следующим образом.

Уясняется содержание задачи. Если в задаче идет речь о многограннике или фигуре вращения, то необходимо установить их форму. Для этого используются все доступные средства и методы: готовые модели; построение модели по условию задачи; проекционный чертеж; готовые развертки исследуемой фигуры; дополнительные построения на проекционном чертеже, модели или развертке; различные изображения одной и той же фигуры с целью получения наиболее наглядного изображения фигуры; построение различных сечений (разрезов) исследуемой фигуры (без искажения их формы).

При решении задач на доказательство и вычисление важно получить дополнительные сведения о свойствах исследуемой фигуры (хотя бы сначала в виде правдоподобных гипотез). При решении задач по планиметрии на доказательство такие гипотезы можно получить путем инструментальных построений и измерений. В стереометрии этот метод практически ничего не дает.

Поэтому приходится рассматривать сначала различные частные случаи данной задачи. Такая работа упрощает поиск решения сложных задач.

Всякую треугольную пирамиду можно разделить на две треугольные пирамиды, имеющие по две взаимно перпендикулярные грани. Поэтому решение всякого многогранника по существу сводится к решению прямоугольных трехгранных углов.

Комплексное использование построений и вычислений упрощает поиск решения задач по стереометрии и сокращает вычисления. При этом не следует забывать о дополнительных построениях. Для того, чтобы выбрать наиболее рациональный план и методы решения этих задач, важно с самого начала разобраться, является ли данная задача аффинной или метрической.

Книга адресуется учителям математики для кружковой работы и факультативных занятий.