Задание 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧИСЛОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Задача 1. Что больше: $\frac{368972}{754797}$ или $\frac{368976}{764804}$?

Первое решение. Обозначим: $368972 = n$, $764797 = k$. Исследуем разность

$$\frac{n}{k} - \frac{n+3}{k+7} = \frac{7n - 3k}{k(k+7)}.$$

Очевидно, $7n > 7 \cdot 360\,000 = 252 \cdot 10\,000$ и $3k < 3 \times 770\,000 = 231 \cdot 10\,000$.

Теперь ясно, что первая дробь больше второй.

Второе решение. Числитель второй дроби больше числителя первой дроби на 3, знаменатель второй дроби больше знаменателя первой дроби на 7. Но

$$\frac{3}{7} < \frac{368\,972}{764\,804}.$$

Поэтому первая из данных дробей больше второй дроби.

Третье решение. Разделим первое число на второе и преобразуем полученную дробь следующим образом:

$$K = \frac{368\,972 \cdot 764\,804}{368\,975 \cdot 764\,797}$$

Так как $\frac{3}{368\,975} \approx \frac{1}{120\,000}$, $\frac{7}{764\,797} \approx \frac{1}{120\,000}$, то $K > 1$, и первая из данных дробей больше второй дроби.

Четвертое решение. При помощи микрокалькулятора получаем

$$\frac{368\,972}{764\,797} \approx 0{,}4824443; \quad \frac{368\,976}{764\,804} \approx 0{,}482448.$$

Задача 2. Извлечь корень пятой степени

$$\sqrt[5]{21682 + 305\sqrt{5}}$$

Р е ш е н и е . Ьудем искать рациональные числа *п* и *k* такие, что

д/682 + 305^/5 = *п* + *kф.*

Для этого при помощи микрокалькулятора последовательно находим:

sjb « 2,2360679; (1)

д/5-305 «682,0007; (2)

682 + 682,0007 да 1364,0007; (3)

д/б82 + 305д/5 « 4,2360679. (4)

Проделанная работа помогает найти путь к решению задачи. Сравнив равенства (1) и (4) , приходим к предположению, что *k*= 1 и /1 = 2, т. е. наверное,

д/б82 + 305-V5 = 2 + -*y/E.* (5)

В справедливости равенства (5) легко убедиться возведя его обе части в пятую степень.

З а д а ч а 3. Найдите *x и y,* если

-\/119 287 — 48 682д/б = л; + *ipj*6.

Р е ш е н и е . При помощи микрокалькулятора получаем:

д/119 287 — 48 682д/б ж 2,101121; д/б«2,44949;

x + 2,44949у « 2,101112. (|)

Естественно попытаться поискать сначала *x* и *y* среди целых чисел. Из равенства (1) ясно, что *x* и *y* натуральными быть не могут, ибо даже если *x* = 1 и *y* — 1, то левая часть равенства (1) больше правой его части. Поэтому *x* и *y* — числа различных знаков.

При помощи микрокалькулятора получаем:

2.44949 • 1 « 2,44949,
2.44949 • 2 ж 4,898978,
2.44949 • 3 ж 7,34870, (2)
2.44949 • 4 « 9,79796,
2,44949-5 ж 12,247445,
2.44949 • 6 ж 14,69694,
2.44949 • 7 ж 17,14643,
2.44949 • 8 « 19,59592,
2.44949 • 9 « 22,04541.

Сравниваем десятичные части полученных произведений с десятичной частью ч-исла 2,101121 Приходим к выводу, что y не может быть натуральным числом Значит, y — целое отрицательное число, х — натуральное число.

Замечаем, что 4,898978 + 2,10112 ж 7. А это приводит к гипотезе, что 2,101121 « 7 — 2д/б.

Вычисляем (7 — 2д/б)^5, После упрощения получаем

(7 — 2д/б)^5 = 119 287 - 48 682л/б.

Ответ, $x = 7$, $y =$ — 2.

Задача 4. Упростите выражение

$M=$ ^ (1

У4 -3-^5 + 2-\/25 - Vl25

Решение. При помощи микрокалькулятора найдем приближенное значение выражения M Для упрощения вычислений преобразуем выражение

K = 4-3^5+ 2^25-д/725

следующим образом:

K = 4 - д/405 + д/400 - д/Т25 = 4 + д/400 -

-(д/^+д/тк).

На микрокалькуляторе получаем:

K ~ 0,6423887 и M ж 2,4953477

Так как в выражении M содержатся л[2Ъ =

= (д/5)^2 и дА*25 = (д/5)^3, то и в преобразованном виде будет д/б. Но 1,4953487 (результат полученна микрокалькуляторе).

Таким образом, в результате выполненного математического эксперимента приходим к предположению, что M = -л/Е + 1.

Попытаемся доказать, что

____________ 2 = д/5+1. (2)

д/4 -3-^5"+ 2-^25 -д/125

или

4 2 - = У4 -3д/5 + 2^25 -д/125. (3)

д/5 + 1

Если равенство (3) верно, то после возведения его обеих частей в квадрат получаем;

$$\frac{4}{\sqrt[4]{25}+2\sqrt[4]{5}+1}=4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt[4]{25}-\sqrt[4]{125}$$

или

4 = (725 + 2 V 5 + 1) Х

Х (4-3д / б +2^25-^125);

4 = (-^25 - 3д/125 + 2д/б25 - -^25 • 125 +

+ 8д/5 - 6^25 + 4д/125 - 2д/б25 + 4 –

— 3 д/5+ 2 д/25-д/125!

Последнее равенство верно. Таким образом, М =

= д/5+ 1

З а д а ч а 5 Пятая степень натурального числа *п* состоит из цифр 1, 2, 3, 3, 7, 9. Найти это число.

Р е ш е н и е. Составим несколько шестизначных чи сел (включая наименьшее и наибольшее) из данных цифр и при помощи микрокалькулятора извлечем из них корни пятой степени: -^j 123379 ж 10,42914; д/173923 да 11,17047; л/213379 да 11,63672; л/337912 да да 12,75735; У733921 да 14,89807; д/973321 да 15,76345. Отсюда ясно, что 11 15. Но искомое число *п* не может быть равно 15, потому что число 15^5 оканчивается цифрой 5, которой нет среди данных цифр. Итак, 11 14.

Число 14^5 оканчивается цифрой 4, которой тоже нет среди данных цифр. Поэтому 11 13.

Число II^5 начинается и оканчивается цифрой 1, а среди данных цифр только одна единица. Поэтому *п* = 12 или *п* = 13.

Вычислив, получаем:

$$12^5 = 248832,\ 13^5 = 371293.$$

Итак, /г = 13.

З а д а ч а 6. Найти сумму

$$S(n)=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n\ \text{--J.}}{\text{п|}}, \qquad (1)$$ [1]

[1] /г! = 1 · 2 · 3 · · 2/г

Найдем решение задачи для нескольких значений *п:*

S(2)= ± 5(3)= S<4)= g,S(5)= Jf,S(6)=

Нетрудно заметить, что для всех полученных значений *S(n)* числитель на 1 меньше знаменателя. Во-вторых, каждый последующий знаменатель получается из предыдущего следующим образом: 6 = 2 *3 = 3!, 24 = = 6 • 4 = 2 • 3 • 4 = 4!, 120 = 24 . 5 = 2 • 3 • 4 • 5 = 5!, 720= 120 *6 = 2 - 3 - 4 - 5 - 6 = 6!

Итак, вырисовывается гипотеза

s Λ = ! 4r– W

Докажем (или опровергнем) эту гипотезу методом математической индукции:

1) Для *п* = 2 формула (2) верна.

2) Допустим, что

= (3)

3) Находим:

S(6+ 1)=J-+A +...+±=±4- * =
; 2! 3! *k*\ (fe + 1)!

ft! — 1 _|_ *k* _ *(k*\ — l)(fe+ *1)+k* _ *(k* + !)! • - 1
(ft + 1)! (ft + 1)! (ft + 1)! '

Ответ. *S(n) =* ——~1 .
7 *n*\

Заметим, что limS(n) = 1.
П —*□ + oo

Задача 7. Как составить из цифр 0, 1,2, ..., 9 пять таких двузначных чисел, чтобы их произведение было наибольшим? (Каждая цифра должна быть использована один раз.)

Решение. Допустим, что искомое произведение есть 10 • 23 • 45 • 67 • 89. Можно ли как-то увеличить это произведение? Можно, если 10 заменим на 19 (увеличение почти в два раза) и 89 заменим на 80 (уменьшение примерно только на 9%): 1 9 * 2 3 X X 45 . 67 • 80.

Последнее произведение можно еще увеличить, если заменить 19 на 91, 23 — на 32, 45 — на 54, 67 — на 76: 91 *32 - 5 4 - 76 -80.

Если у множителей 32 и 76 цифры 2 и 6 поменять местами, то получим 36 и 72. При такой замене первый множитель увеличился более чем на 10 %, а второй — уменьшился менее чем на 4 %. Итак, получаем еще одно приближение к ответу 91 · 36 · 54 · 72 · 80.

После замены множителя 36 на 63 получаем 91 –63 –54 – 7 2 – 80.

Замечаем, что если поменять местами цифры 1 и 0, то вместо множителей 91 и 80 получаем 90 и 81. Но 9 0 * 8 1 > 9 1 *80. Поэтому получаем еще одно приближение к ответу: 90 · 63 · 54 · 72 · 81.

Замечаем, что сумма цифр каждого из множителей в последнем произведении равна 9. Наверное, это произведение и будет ответом на вопрос задачи. В самомделе, 90 · 63 · 54 · 72 · 81 = 9^5(6 · 7 · 8 · 9 ·10).Ни один из полученных в скобках сомножителей нельзя больше увеличить, так как все они– должны быть различными.

О т в е т. 90 · 63 · 54 · 72 · 81 = 1785641760.

З а д а ч а 8. Найдите целую часть числа

Ы*п* + У я + 1 + Уга + 2 $)^2$,

если *п* — натуральное число.

Р е ш е н и е. Обозначим

(Уга + У га + 1 + Уга 4˜ 2 $)^2$ = /(«), (1) -

[(Уга + У« + 1 + Уга + 2 $)^2$] = ф *(п).*

Для получения гипотезы выполним математическое моделирование, т. е. составим таблицу некоторых значений функций *f(п)* и ф*(п):*

п	*f(n)*	<р(я)	*п*	*f(n)*	ф *(п)*
1	17,191508	17	11	107,87477	107
2	26,484036	26	12	116,88442	116
3	35,618441	35	13	125,89270	125
4	44,696680	44	14	134,89999	134
5	53,748090	53	15	143,90615	143
6	62,784516	62	16	152,91167	152
7	71,811721	71	17	161,91659	161
8	80,832771	80	18	170,92097	170
9	89,849589	89	19	179,92493	179
10	98,863327	98	20	188,92851	188

Таблица подсказывает, что

[(д/я + д/я + 1 + д/я + 2)²] = 9я -f 8. (2)

Таблица приводит также к предположению, что

9я –f– 8 <С (д/я –f“ д/я“Ь 1 Н⁻ д/я 4" 2) <С (9я —f~ 8) —(— 1. (3)

Для обоснования полученных гипотез преобразуем функцию /(я) следующим образом:

/(я) = (д/я + д/я~+ 1 + д/я + 2)² = я + (я –f– 1) + (я –f–
—2) —|—2д/я · д/я –f– Т –f– 2 д/я · д/я –f– 2 –f– 2 д/я –)– 1 X
X д/я +2 = 3/t —|— 3 —|— 2 (д/я · д/я + 1 –f– д/я · д/я –f– 2 –f–
+ д/я + 1 · д/я + 2).

На основании теоремы о средних величинах

0,5(а + й)>д/а& (а, *Ь* > 0) получаем:

2д/я · д/я + 1 < 2я + 1,
2д*Гп* · д/я + 2 < 2я + 2,
2д/я+ 1 · д/я + 2 < 2я + 3.

Таким образом, /(я) С 9я + 9.
Теперь докажем неравенство

(У ^ + У « + 1 + У « + 2)²>9« + 8. (4)

Исследуем при помощи производной функцию

/(*) = (д/х + *л]х* + 1 + *-yjx* + 2)² — 9* — 8

для x ^ 1. Находим:

/'(х) = 2д/х –J– д*[x* + 1 + д*1x* + 2)/—!_ –f– _. –
' 2д/л: 2дх+1

+Т^г)–⁹⁼–⁶⁺(л / ^⁺л / ^)+

+(лШ+лЯ^г)+(лШ+лШ>

Так как каждое значение выражения в круглой скобке не меньше 2, то /'(*)> 0. Отсюда ясно, что /(я) —

возрастающая функция, и для доказательства неравенства (4) достаточно проверить его справедливость при $п = 1$.

Таким образом, доказано, что

(Ы''+ +1 + л/п + 2)²) = 9п +8.

З а д а ч а 9. Найдите целую часть выражения

$$a=\sqrt{1981+\sqrt{1981+\sqrt{1981+\ldots+\sqrt{1981+\sqrt{1981}}}}},$$

если число 1981 входит в него $п$ раз ($п$ ^ 2).

Р е ш е н и е. При помощи микрокалькулятора получаем:

а, = -л/1981 да 44,508426;

a_2 = д/1981 + д/1981 да 45,005648;

$а_3$ = д/1981 + д/1981 + л/1981 да 45,011173;

$а_4$ =AJ 1981 + д/1981 + д/1981 + –у/1981 да да 45,011234;

$а_5$ да 45,011234.

Отсюда появляется предположение, что целая часть числа a равна 45, т. е. $[a] = 45$.

Проверим это предположение следующим образом:

Допустим, что

у 1981 + д/1981 +–+У1981 + д/1981 >46.

Тогда д/1981 + ... + д/1981 + д/1981 > 135 и

1981 + ... + д/1981 + д/1981 > 135^2.

Продолжая этот процесс, приходим к очевидному неверному неравенству. Поэтому $[a] = 45$.

З а д а ч а 10.

Найдите все натуральные числа $п$ такие, что сумма $S(n)$ цифр десятичной записи числа $2^п$ равна 5.

Р е ш е н и е. Для поиска решения составим таблицу значений выражения $2^г$:

n	2«	*S{n)*	*n*	*2'1*	*S(n)*
1	2	2	16	65 536	25
2	4	4	17	131 072	14
3	8	8	18	262 144	19
4	16	7	19	524 288	29
5	32	5	20	1 048 576	31
6	64	10	21	2 097 152	26
7	128	11	22	4 194 304	25
8	256	13	23	8 388 608	41
9	512	8	24	16 777 216	37
10	1024	7	25	33 554 432	29
1 1	2048	14	26	67 108 864	40
12	4096	19	27	134 217 728	35
13	8192	20	28	268 435 456	43
14	16 384	22	29	536 870 912	41
15	32 768	26			

Внимательное изучение этой таблицы приводит к предположению, что

5(/г + 6я) = 5(£) + 9т, (1)

где *п, к* — натуральные числа; *т* — натуральное число или нуль.

Но почему именно при умножении числа $2^п$ на 2^6 получаем число, сумма цифр которого или равна сумме цифр числа *2!\|* или отличается от него на 9т? Каким свойством обладает число 2^6 и его сумма цифр?

Замечаем, что 5(6)= 10 и 2^6 = 64 = 63 + 1 = = 9 - 7 + 1

Но что из этого следует? Рассмотрим пример:

$2^{14} \cdot 2^6$ = 16384(9-7 + 1) = 9*7 · 16384 + 16384.

Число 9 - 7 - 16384 делится на 9. Поэтому и сумма его цифр делится на 9. Теперь понятно, почему верно равенство (1)

Итак, 5 (5) =5. Но почему нет других решений? В силу равенства (1) их следует искать среди 5(11), 5(17), 5(23), 5(29), ... Но 5(11), 5(23), 5(35), ... оканчиваются восьмеркой. Поэтому нас могут интересовать только 5(17), 5(29), 5(41), т. е. 5(5+ *\|2k)$_y$* где *k* — натуральное число.

Легко показать, что все 5(5 + *(2k* + 1) 12) оканчиваются цифрами 7 и 2, т. е. 5(5 + *(2k* + 1)12) ^ 9. Поэтому нас интересуют только 5(5 + 24&), которые оканчиваются цифрами 1 и 2 пр-и *k^\|.* Но числа вида 2° + *2Ak (k* ^ 1, *k* — натуральное число) больше 1000 000 012. Число 2 000 000 012 (его сумма цифр

S = 5) после деления на 2^2 становится нечетным, но $2^3 + {}^{24к}$ — четное.

Числа 1 100 ООО 012, 1 010 000 012,1 001 000 012, 1000 100 012, 1000 010 012, 1000 001012 также при делении на 2^2 дают нечетное число. Число 1 000 000 112 не делится на 2^5.

Итак, получаем о т в е т: $п$ = 5.

З а д а ч а 11. Известно, что последними цифрами квадратов натуральных чисел могут быть цифры 0, 1,4, л 5, 6 и 9. Верно ли, что перед последней цифрой в них может встретиться любая группа цифр, т. е., что для любого набора из $п$ цифр $a|$, $a2$, $a_п$ можно найти натуральное число, квадрат которого оканчивается группой цифр $a_{\{}a_2a_3...a_пЬ$ ($Ь$ — одна из перечисленных выше цифр)?

Р е ш е н и е. Для того чтобы получить дополнительные сведения о свойствах квадратов натуральных чисел, составим следующую таблицу:

1^2 = 1,	33^2 = 1089,	65^2 — 4 225,	97^2= 9 409,
2^2 = 4,	34^2 — 1156,	66^2 - 4 356,	98^2= 9 604,
3^2 = 9,	35^2 = 1 225,	67^2 = 4 489,	99^2 = 9 801,
4^2 = 16,	36^2 = 1 296,	68^2 = 4 624,	100^2= 10 000,
5^2 = 25,	37^2 = 1 369,	69^2 = 4 761,	101^2 = 10 201,
6^2= 36,	38^2 = 1 444,	70^2= 4 900,	Ю2^2= 10 404,
7^2 =='49,	39^2 = 1 521,	71^2 = 5 041,	103^2 = 10 609,
8^2 = 64,	40^2 = 1 600,	72^2 = 5 184,	104^2= 10 816,
9^2 = 81,	41^2 — 1 681,	73^2 = 5 329,	105^2 = 11 025,
10^2 = 100,	42^2 = 1 764,	74^2 == 5 476,	1 О6^2 = 11 236,
11^2= 121,	43^2 = 1 849,	75^2 = 5 625,	107^2= 11 449,
12^2 = 144,	44^2 = 1 936,	76^2 = 5 776,	108^2 = 11 664,
13^2= 169,	45^2 = 2 025,	77^2 = 5 929,	Ю9^2 = 11 881,
14^2 = 196,	46^2 = 2 1 16,	78^2 = 5 984,	110^2= 12 100,
15^2 = 225,	47^2 = 2 209,	79^2 = 6 241,	111^2= 12 321,
16^2= 256,	48^2 = 2 304,	80^2 = 6 400,	112^2 = 12 544,
17^2 = 289,	49^2 = 2 401,	81^2 = 6 561,	113^2= 12 769,
18“ = 324,	50^2 = 2 500,	82^2 = 6 724,	114^2= 12 996,
19^2= 361,	51^2 = 2601,	83^2 = 6 889,	115^2 = 13 225,
20^2 = 400,	52^2 = 2 704	84^2 = 7 056,	116^2= 13 456,
21^2 = 441,	53^2 = 2 809	85^2= 7,225,	117^2 = 13 689,
22^2— 484,	54^2 = 2916	86^2 = 7 396,	118^2 = 13 924,
23^2 = 529,	55^2 = 3 025	87^2 = 7 569,	119^2 = 14 161,
24^2= 576,	56^2 = 3 L36	88^2 = 7 744,	120^2= 14 400,
25^2 = 625,	57^2 = 3 249	89^2 = 7 921,	121^2 = 14 641,
26^2= 676,	58^2 = 3 364	90^2 = 8 100,	122^2= 14 884,
27^2 = 729,	59^2 = 3 481,	91^2 = 8 281,	123^2= 15 129,
28^2= 784,	60^2 = 3 600,	92^2 = 8 464,	124^2 = 15 376,
29^2 = 841,	61^2 = 3 721,	93^2■= 8 649,	125^2= 15 625.
30^2 = 900,	62^2 = 3 844,	94^2 = 8 836,	
31^2 = 961,	63^2 = 3 969,	95^2 sss: 9 025,	
32^2 = 1024,	64^2 = 4 096,	96^2= 9 216,	

Выводы из рассмотрения этой таблицы:

1) Если последняя цифра квадрата натурального числа 0, то и перед ней всегда стоит цифра 0.

2) Если последней цифрой квадрата является 1, то перед ней встречаются только 0, 2, 4, 6 или 8, т. е. только четные цифры.

3) Если последней цифрой квадрата является 4, то перед ней встречаются только четные цифры.

4) Если последняя цифра квадрата 5, то перед ней стоит только цифра 2.

5) Если квадрат натурального числа оканчивается цифрой 6, то перед ней стоит нечетная цифра.

6) Если квадрат натурального числа оканчивается цифрой 9, то перед ней стоит четная цифра.

Эти шесть свойств квадратов натуральных чисел легко доказываются, так как последние две цифры квадрата определяются только двумя последними цифрами числа, возводимого в квадрат.

Получаем общий вывод:

Для любого набора из n цифр $a_1, a_2, \dots, a_n$ нельзя найти целое число, квадрат которого оканчивается цифрами $a_1a_2\dots a_nb$ (цифра b равна 0, 1, 4, 5, 6 или 9).

Задание 2. ЗАДАЧИ НА ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

При решении задач на делимость чисел часто находят применение формуле:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}), \quad (1)$$

где n — натуральное число;

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + (-1)^{n-1}b^{n-1}), \quad (2)$$

где $n = 2k + 1$, k — любое натуральное число.

Для того чтобы убедиться в справедливости формул (1) и (2), достаточно перемножить выражения, стоящие в скобках.

З а д а ч а 1. Докажите, что число $17^n - 11^n$ делится на 6 при любом натуральном значении n.

Р е ш е н и е. По формуле (1)

$17^n - 11^n = (17 - 11)(17^{n-1} + 17^{n-2} \cdot 11 + \dots + 11^{n-1})$.

Утверждение задачи доказано.

З а д а ч а 2. Доказать, что 2 · 7" + 1 делится на 3 при любом натуральном *п.*

Так как 2 · 7" + 1 = 2(7" — 1) + 3 и делимость 7" — 1 на 3 следует из формулы (1), то утверждение задачи доказано.

З а д а ч а 3. Доказать, что $3^{2" + 1}$ + $2^{" + 2}$ делится на 7 при любом натуральном значении *п.*

Р е ш е н и е. Очевидно,

$_3 2_„ + 1_{+2}, + 2_{= 9„} . 3_{+2}$п. 4 = 3(9" - 2") +

+ 3 · 2я + 4 . 2" = 3(9" - 2") + 7 · 2".

Число 9" —2" делится на 7 в силу формулы (1). Число 7 · 2" также делится на 7. Задача решена.

Математическая индукция — метод доказательства, основанный на следующем принципе:

1) Некоторое свойство *X* верно при *k* — | .

2) Из предположения, что свойством *X* обладает какое-либо натуральное число /г^1, следует, что этим свойством обладает число *k* 1.

Тогда свойство *X* имеет всякое натуральное число.

З а д а ч а 4. Доказать, что число 8" + 6 кратно 7 при любом целом 1.

Р е ш е н и е. При *п=* 1 утверждение задачи верно. Допустим, что оно верно при *n = k* т. е.

$$8^* + 6 = 7m, \qquad (1)$$

где т — натуральное число.

Проверим теперь, что утверждение задачи верно и при *ti = k* + 1, т. е. верно

$$8^* + ' + 6 = 7/, \qquad (2)$$

где *t* — натуральное число.

Из равенства (1) получаем $8^k = 7m$ — 6. Поэтому

$$8^{* + 1} + 6 = 8 - 8^* + 6 =$$

$$= 8(7m — 6) + 6 = 7 · 8m — 42 — 7(8m — 6),$$

т. е. *t* = 8m — 6.

Таким образом, *t* — натуральное число, и, следовательно, в силу равенства (2) утверждение задачи доказано.

З а д а ч а 5. Доказать, что при любом натуральном *п* выражение $3^{2" + 2} + 2^{6"+1}$ делится на 11.

Р е ш е н и е. При *п=* 1 утверждение задачи верно. Допустим, что это утверждение верно при *п = k(k >* 1), т. е.

$$_{32}\& + 2 \_|\_ {}_2 + 1 _{= l l m j} \quad (!)$$

где m — натуральное число.

Докажем, что утверждение задачи верно и при $n = \kappa + 1$, т. е.

$$_3 2(А+1)+2_{+2}\#^*+1Н.»_{= Пp}{}' \qquad (2)$$

где p — натуральное число.

Из равенства (1) имеем

$$3^{2k+2} = Пт — 2^{“+|} \qquad (3)$$

С учетом равенства (3) сумма

^2(6 + 1) + 2 _|_ 2б)& + 1)+ 1 __ ^2 $_в$ ^2(6 -f 1) _|_ 0+ ^{1} _

$= 3^2(11\ т — 2^{6k+1}) + 2^{6(* + ,)+|} = 3^2 \cdot 1\ lm — 3^2 \cdot 2$ X

X $2^{6*} + 2^7 \cdot 2^“ = 3^2 \cdot 11т + 2^{6*}(2^7 — 2 X 3^2) = 3^2–11т +$

$+ 2^{6*}– 110= 11(9т+ 10–2^м).$

Итак, доказана справедливость равенства (2):

$$p = 9т + 10–2^“$$

З а д а ч а 6. Могут ли числа я^2 + 3п + 39 и $п^2$ + п + + 37 ($п$ — натуральное число) одновременно делиться на 49?

П е р в о е р е ш е н и е. Если при некотором значении $п$ выражения $п^2 + 3п + 39$ и /г + $п$ + 37 делятся на 49, то на 49 должна делиться и их разность:

$$(.п^2 + 3п + 39) – \{п^2 + п + 37) = 2(п + 1).$$

Выражение $2(ti + 1)$ делится на 49, если $п + 1 = 49$& (k — натуральное число). Отсюда $п = 49к— 1$.

Подставив я = 49/г—1 в выражение $п^2 + 3п + 39$, получаем

$$(49/г– I)^2 + 3(49\& — I) + 39 =$$
$$= 49^2Аг – 2 \cdot 496 + 3 \cdot 49/г + 37.$$

Последнее выражение на 49 не делится. Следовательно, данные выражения одновременно делиться на 49 не могут.

В т о р о е р е ш е н и е. Так как $п^2 + 3п + 39 = (п + 5) \cdot (п — 2) + 49$, то $п^2 + 3п + 39$ делится на 49 в том и только в том случае, когда произведение $(п + 5) \cdot (п — 2)$ делится на 49. Но оба множителяв этом произведении отличаются на 7, и поэтому либо одновременно делятся на 7, либо одновременно не делятся на 7. Первый случай имеет место при $п = 7k + 2$.

Аналогично получаем, что выражение

$$п^2 + п + 37 = (п + 4). (п — 3) + 49$$

делится на 49 при $п$ — 7& + 3, и, следовательно, данные в условии задачи выражения одновременно делиться на 49 не могут.

Задача 7. Рассматриваются всевозможные семизначные числа /(, записанные цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, расположенными в произвольном порядке. Существуют ли среди этих чисел два таких числа M и N, что M делится на /V?

Решение. Во-первых, сумма цифр числа K равна 28. Поэтому М и N не делятся на 3 и 6.

Во-вторых, 7654321 является наибольшим из чисел K, а 1234567 — наименьшим. Так как 7654321: : 1234567 ^ 6,3, то ясно, что при делении M на N может получиться только 2, 4 или 5.

Если число M делится на 5, то оно должно оканчиваться цифрой 5. Ясно, что первой цифрой числа M может быть только 6 или 7. Рассмотрим несколько примеров (вычисления ведутся при помощи микрокалькулятора) :

7643215:5 = 1528643, 7436125:5= 1487225,
7432165:5 = 1486433, 6374125:5 = 1274825,
6142375:5= 1228475, 6137245:5= 1227449.

Замечаем, что все частные содержат цифру 8 или 9. Но почему? Да потому, что при делении на 5 всегда приходится делить число 41, 42, 43 или 45 на 5.

Таким образом, осталось выяснить, существует ли равенство $2N = M$ или $4N = M.$

Рассмотрим несколько примеров:

3765421 · 2 = 7530842, 3765412 · 2 = 7530824,
2563714 · 2 = 5127428, 1654372 · 2 = 3308744,
2134567 · 2 = 4269134, 1234765 · 2 = 2469530.

После рассмотрения этих примеров становится понятным, что при умножении любого числа N на 2 получаем число с цифрой 8, если после 4 в N стоит цифра 1, 2 или 3. Если в N после цифры 4 стоит цифра 5, 6 или 7, то при его умножении на 2 получаем число с цифрой 9.

Осталось выяснить, существует ли равенство 4А7 = Л1. Рассмотрим несколько примеров:

1765432 4 = 7061728, 1276543 4 = 5106172,
1273456 4 = 5093824, 1374625 4 = 5498500,
1354627 4 = 5418508, 1257346 4 = 7029384,
124.76534 =4990612, 123J654 4 = 4950616,
1275643 4 = 5102572, 1526743 4 = 6106972,

1567234 4 = 6268936,
1723654 4 = 6893616,
1245763 4 =4983052,
1725364 4 = 6901456,
1256734 4 = 5026936,
1526473 4 = 6105892,
1274536 4 = 5098144.

1742356 4 = 6969424,
1243576 4 = 4974304,
1724653 4 = 6898612,
1254763 4 = 5019052,
1263754 4 = 5055016,
1726543 4 = 6906172,

Во-первых, ясно, что N может начинаться только цифрой 1 и не может оканчиваться цифрами 2, 7 или5.

Во-вторых, M везде содержит цифру 0, 8или9.

И это зависит от того, какие две цифры стоят в N после 2:

34, 35, 36, 37, 43, 45, 46, 47, 53, 54,
56, 57, 63, 64, 65, 67, 73, 74, 75, 76.

Таким образом, доказано, что задача не имеет решения.

З а д а ч а 8. Может ли число 5" — 1 делиться на $4^п$ — I, если $п$ — натуральное число?

Р е ш е н и е. Обозначим $M(п)$ = $5^п$ — I, $K(п) = 4^п$ — — 1. Для поиска гипотезы составим таблицу значений $M(п)$ и $K(п)$:

n	$M(n)$	$K(n)$
I	4	3
2	24	15
3	124	63
4	624	255
5	30 124	1 023
6	150 624	4 095
7	753 124	16 383
8	3 765 624	65 535
9	18 818 124	262 143
10	94 090 624	1 048 575
11	370 045 124	4 194 303
12	1 852 265 624	16 777215
13	9 261 328 124	67 108 863
14	46 306 640 624	268 435 455
15	231533 203 124	1073 741823

Что дает рассмотрение таблицы?

1) Число M оканчивается цифрой 4.

2) Число K оканчивается цифрой 3 или 5. Причем, если $п$ — нечетное, то K оканчивается цифрой 3, а если $п$ — четное, то K оканчивается цифрой 5.

Следовательно, сумма цифр числа K делится на 3, т. е. по-видимому, число K делится на 3. Почему? Потому что

$$4^n - 1^n = (4 - 1) \cdot P(n)$$

где $P(n)$ — многочлен.

Теперь ясно, что число M не делится на число K, если n — четное. Суммы цифр числа M (при нечетных /?) дают основание предположить, что число М при всех нечетных n не кратно 3. Но как это доказать?

Итак, как доказать, что число $Q = 5^{2k+1} - 1$ (k — натуральное число) не делится на 3?

Представить Q так:

$$Q = (6 - 1)^{2k+1} - 1.$$

Если $k = 1$, то $Q = (6 - 1)^3 - 1 = (6^3 - 3 \cdot 6^2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 \cdot 1^2 - 1^3) - 1.$

Если $k = 2$, то $Q = (6 - 1)^5 - 1 = (6 - 1)^3(6 - 1)^2 - 1 = (6^3 - 3 \cdot 6^2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 \cdot 1 - 1) \cdot (6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 1 + 1) - 1.$

Если $k = 3$, то $Q = (6 - 1)^7 - 1 = (6 - 1)^3(6 - 1)^4 - 1 = (6^3 - 3 \cdot 6^2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 \cdot 1 - 1) \cdot (6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 1 + 1)^2 - 1.$

Вообще,[1]

$$Q = (6 - 1)^{2k+1} - 1 = (6^3 - 3 \cdot 6^2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 \cdot 1 - 1) \times$$
$$\times (6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 1 + 1)^{k-1} - 1.$$

Теперь ясно, что Q можно представить в следующем виде:

$$Q = (6L - 1) - 1 = 6L - 2.$$

Отсюда понятно, что Q не делится на 3.

Таким образом, ни при каком натуральном значении n число $5^n - 1$ не делится на число $4^n - 1$.

Для решения этой задачи можно применить и метод математической индукции.

Задача 9. Восстановить числа (* обозначают цифры от 0 до 9):

```
(1)  * 7 * * * *
(2) ____________
(3)      * * 7
(4)   * * * * * * *
(5) ____*7* * * *
(6)    *7* * * *
(7) ____________
     * * * * * * *
(8)  * * * * 7 * *
(9) ____________
   − * * * * * *
     * * * * * *
(10)____________
           0
```

1

Для упрощения рассуждений пронумеруем строчки, в которых записаны числа, получаемые в процессе деления.

Делитель — шестизначное число. Третья цифра частного — 7. При умножении шестизначного числа на 7 получили шестизначное число (6-я строчка). Но это возможно только в том случае, если делитель начинается цифрой 1. Итак, делитель имеет вид: 1**7*.

Для упрощения рассуждений делитель и частное запишем соответственно в виде: 1АБВ7Г, ДЕ7ЖК.

Далее, шестизначные числа записаны во 2-й, 6-й, 10-й строчках, семизначные — в 4-й и 8-й строчках. Поэтому Е-8 или Е-9, Ж-8 или Ж-9, 1 ^ А ^ 4.

Если при умножении числа 1АБВ7Г на 8 или 9 получается семизначное число, то оно обязательно начинается цифрой 1.

Допустим А = 4. Тогда число из 6-й строчки начиналось бы цифрой 9. Но этого не может быть, так как при вычитании из шестизначного числа (строчка 5) шестизначного числа (строчка 6) получаем шестизначное число (строчка 7). Итак, А *ф4.* По этой же причине А *Ф* 3. Следовательно, А = 1 или *К —2.*

Допустим, что А = 1. Тогда на основании 6-й строчки получаем, что Б=1 (Б не может быть равно нулю в силу 4-й и 8-й строчек; Б не может быть больше 1 в силу 6-й строчки).

Итак, допустим, что делитель имеет вид 111В7Г.

В силу 4-й и 8-й строчек В *Ф* 0. С другой стороны, В«<4 (в силу 6-й строчки). Если делитель имеет вид 11117Г, 11127Г или 11137Г, то при любом значении Г в 8-й строчке третья цифра справа не будет равна 7. Следовательно, А *Ф* 1 и В >> 3.

Итак, делитель имеет вид 12БВ7Г.

Все, до сих пор установленное, внесем в данный пример:

```
**7*******   | 12БВ7Г
******       | ДЕ7ЖК
*****7*
1******
  *7****
 87****
   *******
   1***7**
     ******
     ******
        0
```

Теперь понятно, что первой цифрой 5-й строчки является 9, а 7-я и 8-я строчки начинаются цифрами 1 и 0:

```
**7*******      | 12БВ7Г
                  ДЕ7ЖК
***** 7 *
I******
   97 ****
   87****
   10*****
   10**7**
    ******
    ******
```

Так как 120-9 = 1080, 121 -9 = 1089, 122 - 9= 1098, 123 *9=1107, то в силу 8-й строчки третья цифра этой строчки не может быть больше 2, если Ж = 9. Но 120-7 = 840, 121-7 = 847, 122-7 = 854.

Поэтому в силу 6-й строчки *Жф9.* Итак, Ж = 8. Далее 123 - 7 = 861, 124 - 7 = 868, 125-7 = 875, 126 - 7 = 882. Отсюда и в силу 6-й строчки следует, что Б = 4 или Б = 5. Но Б *Ф 4,* так как 1249-8 = 9992 (см. 8-ю строчку). Следовательно, Б = 5.

Сравнивая 3-ю и 4-ю строчки, получаем, что 3-я строчка начинается с 1 (больше единицы первая цифра 3-й строчки не может быть еще и потому, что первая цифра делителя 1). Кроме того, 125 - 8 = 1000, 126 - 8 = = 1008. Поэтому третья цифра 8-й строчки 0. Тепепь- имеем такую картину:

```
**7*******      | 125В7Г
******          | ДЕ78К
I****7*
1 ******
   97****
   87****
    1Q*****
    100*7**
      'i' *i»'f*
      ф * :5c :}c $ *
           o
```

Далее, 1251-7 = 8757, 1252-7 = 8764, 1253-7 = = 8771, 1254-7 = 8778, 1255-7 = 8785, 1256-7 = 8792, 1257•7 = 8799, 1258 • 7 = 8806.

Поэтому (см. 6-ю строчку) 1 ^ B ^ 7.

При умножении числа 125В7Г (при любом значении Г) на 8 третья цифра справа (в 8-й строчке) будет равна 7 только в том случае, если произведение В-8 оканчивается цифрой 2 (8В — число четное). Это возможно, если В = 4 или В = 9. Но 1 ^ B ^ 7. Итак, В = 4.

Так как 7*8 = 56, то Г • 9 < 40, т. е. Г ^ 4. Далее, 125470 • 7 = 878290 и 125474 • 7 = 878318. Поэтому третья цифра слева в 6-й строчке 6, третья цифра слева в 5-й строчке 9, тогда

```
                    12547Г
******              ДЕ78К
1****7*
1***** *
_979***
 878***
  101****
  100*7**
    1 *****

          о
```

Из 9-й строчки следует, что К = 1.

Так как 125471 - 8= 1003768, 125474-8 = 1003792, то при Г ^ 4 четвертая цифра слева в 7-й строчке 6 (6, а не 5, потому что 7 + 5=12). Теперь получаем

```
**7*******   | 1254 Г
******         1ДЕ781
1****7*
1 ******
_ 979***
  878***

  1016***
  10037**
 _ 12547*
   12547*
       0
```

Сравнивая 5, 6 и 7-ю строчки, получаем, что четвертая цифра слева в 6-й строчке не должна быть больше 3. А это возможно, если 2 ^ Г ^ 4.

В 7-й строчке пятая цифра слева может быть равна 2 или 3. Но так как 125472-8=1003776, 125473-8 = = 1003784, 125474-8= 1003792, то пятая цифра слева в 7-й строчке может быть только 3 и четвертая цифра в 6-й строчке 3. С учетом этого получаем:

```
  **7*******       12547Г
— ******           ДЕ781
  1****7 *
  1 ******
   9799**
     8783**
 _ 10163**
     10037**
        12547*
        12547*
             0
```

Сравнивая 3, 4 и 5-ю строчки, получаем, что в 4-й строчке вторая цифра справа может быть 8 или 7. Но 12547-9=112923 и 1 8 < 9 Г < 40. Поэтому Е Ф 9, т. е. Е = 8. Но 12547-8=100376 и 16<8Г<32. Поэтому Г = 2 или Г = 3, и, следовательно, получаем:

```
    **7*******      |12547Г
    ******          |ДЕ781
 1 * * * * 7
   j ***** *
     9799**
       8783**
        10163**
   ~10037**
      _12547*
          12547*
```

Сравнивая 3, 4 и 5-ю строчки, получаем, что в 4-й строчке вторая цифра справа может быть 8 или 7. Но 12547-9= 112923 и 18<9Г<40. Поэтому Е ф9, т. е. Е = 8. Но 12547-8= 100376 и 16<8Г<32. Поэтому Г = 2 или Г = 3, и, следовательно, получаем:

```
**7*******      |12547Г
******          ]Д8781
_ 110177*
   10037**
   9799**
     8783**
 _ 10163**
     10037**

  _ 12547*
     12547*

        0
```

Из первых трех строчек ясно, что в 3-й строчке третья цифра слева 6 или 7. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это будет только в том случае, если Д = 3 или Д = 5 соответственно.

Легко проверить, что Д *Ф* 3. Итак, Д = 5. Теперь очевидно, что Г = 3.

Окончательно находим: при делении числа 7375428413 на 125473 получаем 58781.

Задание 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

З а д а ч а 1. При каких натуральных *п (п* ^ 2) верно равенство

У 17д/5 + 38 + V 17д/5 - 38 = У~20? (1)

Р е ш е н и е. При помощи микрокалькулятора находим:

17д/5 + 38 да 38,013154 + 38 да 76,013154 > 1;

17д/5 — 38 да 0,013154 < 1; д/20^ 4,4721359.

Отсюда ясно, что положительная функция *f(n) =*

= д717д/5 + 38 является убывающей, и

а функция *(р(п) =*д/17 д/б — 38 — возрастающая, и ,ф(я) < 1. Для обнаружения некоторых свойств функции я|?(ат) = *f(n)* + ф(я) выполним математический эксперимент (составим таблицу значений функции *ty(n)* :