ГЛАВА I

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Источники приближенных чисел

В практической деятельности людей, в науке и технике постоянно встречаются как точные, так и приближенные числа.

Так, например, если по сообщениям газет мы узнаем, что такое-то Строительное управление города Москвы сдало Моссовету 9 новых домов, у которых имеется 458 квартир с общей жилплощадью около 12 500 $м^2$, то первые два числа, 9 и 458, являются точными; произвести подсчет числа вновь выстроенных домов и имеющихся в них квартир — дело простое, но определить жилую площадь каждой квартиры, а потом и всех квартир, по сути дела можно только приближенно. Дело в том, что когда определяется площадь пола одной комнаты, то обычно измеряют его длину и ширину с точностью до 1 *см*, доли сантиметра при этом не учитываются; полученные два числа перемножают и произведение округляют с точностью до сотых долей квадратного метра. Если еще учесть то обстоятельство, что пол комнаты редко напоминает прямоугольник (обычно в нем имеются выступы, площадь которых оценивается часто на глаз), то каждому ясен приближенный характер того числа, которое принимается за площадь комнаты. Из таких приближенных чисел сложением образуется жилая площадь каждой квартиры, а потом и общая жилплощадь всех сданных в эксплуатацию новых домов. Вот почему приведенное в газетном сообщении число — 12 500 $м^2$ является приближенным.

Отметим, что численные данные, которыми располагают такие науки, как физика, механика, астрономия, география и др. всегда приближенны; таковы, например, массы и размеры планет солнечной системы, расстояния между ними, масса электрона, площадь поверхности морей и океанов и т. д.

Таким образом, числа, появляющиеся в результате измерения, взвешивания, а иногда и при подсчете, являются не точными, а приближенными. Возникает вопрос: как оценить точность приближенных чисел и как производить арифметические действия над ними? Ответы на эти вопросы даются в следующих параграфах.

§ 2. Абсолютная погрешность и ее граница

Пусть число a — приближенное значение некоторой величины, число A — истинное, или точное, значение той же величины. Как известно, абсолютная величина неотрицательного числа a есть само число a; абсолютная величина отрицательного числа a есть противоположное ему число $(-a)$. Знак абсолютной величины: $|\ |$ — две вертикальные черточки, между которыми пишется число или буквенное выражение.

Определение. Абсолютная величина разности между точным и приближенным значениями величины называется *абсолютной погрешностью приближенного числа* a:

$$\alpha = |A - a|,$$

где буквой α («альфа») обозначена абсолютная погрешность.

Примеры. 1. В техникум принято 514 человек; если точное число 514 округлить до сотен, получим приближенное число $a = 500$; его абсолютная погрешность $\alpha = |514 - 500| = 14$ (человек).

2. При покупке часов клиент получает гарантийное свидетельство, в котором часовой завод ручается за точность суточного хода часов в пределах ± 45 *сек*, что означает: часы не должны уходить вперед или отставать в сутки более чем на 45 *сек*. Допустим, что при проверке часов с сигналами точного времени, даваемыми по радио, обнаружилось, что часы уходят вперед в сутки на 20 *сек*; тогда $\alpha = 20$ *сек* и есть абсолютная погрешность суточного хода часов. Число 45 (*сек*) есть то, что принято называть *границей* абсолютной погрешности приближенного числа; в данном случае приближенным числом является то время, которое показывают часы. В большинстве случаев точные значения величин нам не известны, а потому нельзя определить и абсолютную погрешность, т. е. число α; однако в каждом конкретном

случае можно установить *границу* абсолютной погрешности, подразумевая под этим такое положительное число, что абсолютная погрешность α всегда остается меньше этого числа. Границу абсолютной погрешности приближенного числа a будем обозначать через Δa («дельта a»).

3. Слесарь не может точно изготовить на токарном станке деталь длиной, скажем, в 80 *мм*. Но с помощью калибромера он может установить, что отклонился от заданного размера не более чем на 0,02 *мм* в ту или другую сторону. В данном случае $\Delta a = 0{,}02$ *мм*, если за a принять приближенную длину 80 *мм*.

Из сказанного выше следует, что гораздо практичнее пользоваться понятием границы абсолютной погрешности, чем абсолютной погрешностью, когда речь идет об оценке точности приближенного числа. В дальнейшем границу абсолютной погрешности будем называть просто абсолютной погрешностью, сохраняя обозначение Δa.

§ 3. Относительная погрешность

Для сравнения точности двух или нескольких приближенных чисел недостаточно знать их абсолютные погрешности, что видно из следующего примера.

Произведены два измерения:

1) длины классной доски: $d_1 = 2{,}4$ *м* с абсолютной погрешностью $\Delta d_1 = 0{,}05$ *м*;

2) расстояния d_2 между двумя станциями железной дороги: $d_2 = 3{,}48$ *км* с абсолютной погрешностью $\Delta d_2 = 10$ *м*. Требуется узнать, какое из этих двух измерений произведено более точно. На первый взгляд может показаться, что более точным является первое измерение, ведь здесь абсолютная погрешность равна только 5 *см*, тогда как при измерении расстояния между станциями допущена погрешность в 10 *м*. Такой взгляд ошибочен: надо учесть, что в первом случае абсолютная погрешность в 5 *см* падает на сравнительно малую длину и составляет $\frac{5\ см}{240\ см} = \frac{1}{48} \approx 0{,}02$ измеряемой длины; во втором случае это отношение

$$\frac{10\ м}{3480\ м} = \frac{1}{348} \approx 0{,}0029.$$

Таким образом, оказалось, что второе измерение примерно в 7 раз точнее первого.

Определение. Отношение абсолютной погрешности приближенного числа к самому числу называется его *относительной погрешностью*:

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{a},$$

где δ_a («дельта малая» с индексом a) означает относительную погрешность числа a.

Относительную погрешность часто выражают в процентах. В примере, рассмотренном в данном параграфе, относительная погрешность будет 2% и 0,29% соответственно.

Пример. Найти относительную погрешность приближенного значения числа π, если считать $\pi \approx 3{,}14$. Так как более точное значение числа π есть 3,141592 ..., то $\alpha = 3{,}141592 - 3{,}14 = 0{,}001592 < 0{,}002$,

$$\Delta 3{,}14 = 0{,}002,$$

а

$$\delta_{3,14} = \frac{0{,}002}{3{,}14} = \frac{1}{1570} = 0{,}000637 \approx 0{,}064\%.$$

§ 4. Точные значащие цифры

Определение 1. Если абсолютная погрешность приближенного числа не превышает половины единицы последнего разряда, то все значащие цифры данного числа называются *точными*. Например,

1) число $A = 58{,}3$ имеет три точные значащие цифры, если $\Delta A \leqslant$ половины десятой доли, т. е.

$$\Delta A \leqslant 0{,}05.$$

2) Число $B = 0{,}032$ имеет две точные значащие цифры, если $\Delta B \leqslant 0{,}0005$ (половина тысячной равна пяти десятитысячным). Нули, стоящие перед первой значащей цифрой (3), в счет точных значащих цифр никогда не идут.

3) Число $C = 2{,}007$ имеет 4 точные значащие цифры, если $\Delta C \leqslant 0{,}0005$. Здесь нули, стоящие между значащими цифрами 2 и 7, также идут в счет точных значащих цифр.

Что касается цифры 0, стоящей в конце записи приближенного числа, то в некоторых случаях нули идут в счет точных цифр, в других — нет.

4) Число 4123, округленное до сотен, будет 4100 (запись: $41 \cdot 10^2$); здесь нули в счет точных значащих цифр не идут, так как они заменяют точные цифры 2 и 3.

5) Точное число 15,003, округленное до сотых долей, дает 15,00; здесь оба нуля идут в счет точных цифр, поскольку в точном числе ни десятых, ни сотых долей не имеется.

Определение 2. Если абсолютная погрешность приближенного числа больше единицы последнего разряда этого числа, то цифры приближенного числа, начиная с этого разряда, называются *сомнительными* или *ненадежными*.

Примеры. 1. $a = 42,3$; $\Delta a = 0,2$. Последняя цифра (3) ненадежна.

2. $b = 18,318$; $\Delta b = 0,03$. Последние две цифры (1 и 8) ненадежны; если $\Delta b = 0,015$, то ненадежна только цифра 8.

В приближенном числе, как правило, сохраняют только одну ненадежную цифру, остальные отбрасывают.

Примечание. Надо различать термины «значащие цифры» и «десятичные знаки», что не одно и то же:

1) приближенное число 45,7 имеет три значащие цифры и один десятичный знак;

2) приближенное число 0,0075 имеет две значащие цифры и четыре десятичных знака.

§ 5. Действия над приближенными числами

В предыдущих параграфах были показаны различные способы оценки точности приближенных чисел.

Теперь возникает такой вопрос: как производить арифметические действия над приближенными числами так, чтобы результаты этих действий не содержали лишних цифр, не заслуживающих доверия.

Проще всего производить действия над приближенными числами по правилам подсчета значащих цифр. Частично эти правила даются при изучении арифметики в V классе. Ниже приводятся формулировки этих правил; на примерах поясняем их применение.

§ 6. Правила подсчета значащих цифр

1. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном числе с наименьшим числом десятичных знаков.

2. При умножении и делении в результате сохраняем столько значащих цифр, сколько их имеет наименее точное данное число. Из нескольких приближенных чисел *наименее*

точным считается то, которое имеет наименьшее количество точных значащих цифр.

3. При возведении в квадрат и куб в результате сохраняем столько значащих цифр, сколько их имеет основание степени.

4. При извлечении квадратного и кубического корня в результате надо сохранить столько же значащих цифр, сколько их имеет подкоренное число.

5. При вычислении промежуточных результатов сохраняется одна лишняя запасная цифра, которая в окончательном результате отбрасывается.

§ 7. Применение правил подсчета цифр

1. Сложение и вычитание. 1) Найти сумму приближенных чисел:

$$1{,}7 + 4{,}35 + 5{,}124.$$

Наименьшее число десятичных знаков имеет первое слагаемое (1,7); в остальных двух слагаемых сохраним один лишний десятичный знак, который в окончательном результате будет отброшен:

$$1{,}7 + 4{,}35 + 5{,}12 = 11{,}17 \approx 11{,}2.$$

2) Вычесть из 69,3 число 4,856. Здесь вычитаемое имеет два лишних десятичных знака по сравнению с уменьшаемым; надо сохранить лишь один лишний знак:

$$\begin{array}{r} 69{,}30 \\ -\;\;4{,}86 \\ \hline 64{,}44 \approx 64{,}4. \end{array}$$

2. Умножение и деление. 3) Вычислить площадь земельного участка, имеющего вид прямоугольника со сторонами $a = 31{,}5$ *м*, $b = 28{,}4$ *м*. Так как сомножители имеют по три значащие цифры, то в произведении сохраняем также три значащие цифры:

$$S = 31{,}5 \cdot 28{,}4 = 894{,}60 \approx 895.$$

4) $52{,}8 \cdot 0{,}32 = 16{,}896 \approx 17.$

Наименее точный множитель (0,32) имеет две значащие цифры; столько же цифр сохраняется в произведении.

5) С участка площадью 2,45 *га* собрано 30,5 *т* картофеля. Определить средний урожай с одного гектара:

$$30{,}5 : 2{,}45 \approx 12{,}4 \ (т).$$

3. Возведение в степень и извлечение корня.

6) $(3{,}18)^2 \approx 10{,}1$.

Основание имеет три значащие цифры; столько же цифр надо удержать в результате возведения в квадрат.

7) $(0{,}132)^3 \approx 0{,}00230$.

8) $\sqrt{12{,}5} \approx 3{,}54$.

9) $\sqrt[3]{3{,}75} \approx 1{,}55$.

10) Вычислить вторую космическую скорость $v = \sqrt{2gR}$, т. е. скорость, при которой снаряд, выпущенный вверх по вертикали, не вернется обратно на Землю.

$$g = 981 \ см/сек^2 \text{ — ускорение силы тяжести,}$$
$$R = 63 \cdot 10^7 \ см \text{ — радиус Земли,}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 63 \cdot 10^7} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}3 \cdot 10^{10}} =$$
$$= 10^5 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}3} = 11{,}2 \cdot 10^5 \ (см/сек),$$

или

$$v = 11{,}2 \ км/сек.$$

Примечание. При решении примеров 6, 7, 8, 9 и 10 были использованы «Четырехзначные математические таблицы» Брадиса.

§ 8. Примеры более сложных вычислений по правилу подсчета значащих цифр

Пример 1. Теплоемкость твердого тела x определяется по формуле

$$x = \frac{(m_2 - m_1 + m_1 n)(t_2 - t_1)}{P(T - t_2)},$$

где m_1 — вес внутреннего сосуда без воды, m_2 — вес внутреннего сосуда с водой, t_1 — первоначальная температура воды, t_2 — температура воды после погружения тела, T — температура кипения воды, n — теплоемкость калориметра и мешалки, P — вес тела, теплоемкость которого надо найти.

Из опыта получены следующие данные:

$$P = 403{,}7; \quad m_1 = 119; \quad m_2 = 673; \quad n = 0{,}094;$$
$$t_1 = 9{,}5; \quad t_2 = 12{,}8, \quad T = 100{,}11.$$

В этом примере величины n и t_1 имеют всего две точные значащие цифры, поэтому более точные данные предварительно округляем, сохраняя в них три значащие цифры: $P = 404$; $T \approx 100$; промежуточные вычисления производим с тремя значащими цифрами, в окончательном результате сохраняем две значащие цифры.

Подставляем числовые данные в формулу:

$$x = \frac{(673 - 119 + 119 \cdot 0{,}094)(12{,}8 - 9{,}5)}{404(100 - 12{,}8)} =$$

$$= \frac{(554 + 119 \cdot 0{,}094) \cdot 3{,}3}{404 \cdot 87{,}2}.$$

Производим вычисления:

$$119 \cdot 0{,}094 = 11{,}186 \approx 11{,}2,$$

$$554 + 11{,}2 = 565{,}2 \approx 565,$$

$$565 \cdot 3{,}3 = 1864{,}5 \approx 186 \cdot 10,$$

$$404 \cdot 87{,}2 = 35\,228{,}8 \approx 35\,200 = 352 \cdot 10^2,$$

$$\frac{186 \cdot 10}{352 \cdot 10^2} = \frac{186}{352 \cdot 10} = \frac{18{,}6}{352} \approx 0{,}0528 \approx 0{,}053.$$

Ответ: $x = 0{,}053$.

Пример 2. В цепь переменного тока включены конденсатор и катушка. Полное сопротивление переменному току определяется по формуле

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

где R — сопротивление внешней цепи, $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ — реактивное сопротивление.

Вычислить Z, если $R = 41{,}4$; $\omega = 0{,}75$; $L = 18$; $C = 0{,}52$.

Наименее точные данные имеют две значащие цифры, поэтому в окончательном результате сохраним только две цифры; промежуточные вычисления будем производить с тремя значащими цифрами:

1) $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0{,}75 \cdot 18 - \frac{1}{0{,}75 \cdot 0{,}52} = 13{,}5 - 2{,}56 = 10{,}9,$

2) $(10{,}9)^2 = 118{,}8 \approx 119,$

3) $41{,}4^2 \approx 1714 \approx 171 \cdot 10,$

4) $119 + 1710 = 1829 \approx 1830 = 183 \cdot 10,$

5) $\sqrt{1830} \approx 42{,}8 \approx 43\,(\Omega).$

§ 9. Вычисления с наперед заданной точностью

В практических вычислениях часто приходится решать следующую задачу: с какой точностью надо взять исходные данные, чтобы погрешность окончательного результата не превысила заданной наперед границы?

Решение поясним на примерах.

Пример 1. Период полного колебания T маятника определяется по формуле: $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина маятника (*см*), g — ускорение силы тяжести (*см/сек*^{2}).

С какой точностью надо измерить длину l и со сколькими значащими цифрами взять числа π и g, чтобы относительная погрешность при вычислении периода T не превышала полпроцента (0,5%)?

Длина маятника $l\approx 80$ *см*. Определяем порядок величины T, т. е. десятичный разряд первой цифры слева (десятки или единицы), для чего принимаем во внимание только первую цифру каждого из округленных чисел π и g ($\pi\approx 3$; $g\approx 1000$):

$$T\approx 2\cdot 3\cdot\sqrt{\frac{80}{1000}}\approx 6\cdot 0{,}28\approx 1{,}7;$$

тогда 0,5% от $1{,}7=0{,}005\cdot 1{,}7=0{,}0085$.

По относительной погрешности мы нашли границу абсолютной погрешности: $\Delta T=0{,}0085$. По величине допускаемой абсолютной погрешности можно судить о том, что период должен иметь три точные значащие цифры, а поэтому длина l должна выражаться приближенным числом с тремя значащими цифрами, т. е. должна быть измерена с точностью до десятых долей сантиметра. Число π лучше взять с четырьмя значащими цифрами, т. е. с одной запасной цифрой, число g — с тремя (981), промежуточные вычисления вести с четырьмя цифрами, в окончательном результате сохранить три значащие цифры.

Пример 2. С какой точностью надо измерить катеты a и b прямоугольного треугольника, чтобы можно было вычислить гипотенузу $c=\sqrt{a^2+b^2}$ с относительной погрешностью δ_c, не превышающей 2%?

Известно, что $a\approx 50$ *см*, $b\approx 80$ *см*. Каждое из приближенных чисел 50 и 80 имеет одну точную значащую цифру. Находим приближенное значение гипотенузы:

$$c=\sqrt{50^2+80^2}=\sqrt{100(25+64)}=10\sqrt{89}\approx 10\cdot 9{,}4=94;$$

$$2\%\ \text{от}\ 94=94\cdot 0{,}02=1{,}88\approx 2.$$

Таким образом, абсолютная погрешность $\Delta c = 2$ (*см*). Это значит, что цифра, указывающая число единиц в окончательном результате, сомнительна, а потому следует катеты a и b взять с двумя точными значащими цифрами, т. е. измерить с точностью до 0,5 *см*. Промежуточные вычисления надо вести с тремя значащими цифрами, а полученное значение гипотенузы c должно быть округлено до двух значащих цифр.

Упражнения

1. Число 2,7182818 округлить до 5, 4, 3 значащих цифр.

2. Расстояние от центра Земли до полюса в километрах равно 6356,909. Округлить это число до 2, 3, 4 значащих цифр.

3. Какая разница между записью температуры 18° и 18,0°?

4. Начертить аккуратно прямоугольник и измерить его стороны с точностью до 1 *мм*. Записать, пользуясь знаками неравенства, между какими числами заключается длина его сторон.

5. Приближенное значение величины x заключено между 6,85 *м* и 6,89 *м*. С какой точностью произведено измерение?

6. Дробь $5\frac{2}{7}$ обратить в десятичную с точностью до 0,001.

7. При взвешивании тела получился вес 18,7 *кг* с точностью до 0,1 *кг*. Указать границы точного значения веса.

8. Найти в процентах границу относительной погрешности числа 3,14.

9. Какое из двух измерений точнее:

1) 895 *м* ($\pm$ 0,5 *м*); 2) 24,08 *м* ($\pm$ 0,01)?

10. Какое из двух приближенных значений числа π точнее,

$$3{,}14 \quad \text{или} \quad 3\frac{1}{7}?$$

11. Написать число 18,754 без лишних цифр, зная, что относительная погрешность его равна $\frac{1}{2}$ %.

12. Найти сумму $2\frac{3}{7}+\frac{1}{15}+4\frac{1}{3}$ с тремя точными десятичными знаками.

13. Расстояние между двумя городами по карте равно 24,6 *см* ($\pm$ 0,2 *см*). Найти действительное расстояние между городами, если масштаб карты 1 : 2 500 000; определить погрешность.

14. Кубатура комнаты 127,4 $м^3$. Сколько весит воздух, содержащийся в этой комнате, если вес 1 $м^3$ равен 1,29 *кг* ($\pm$ 0,01 *кг*)?

15. Сколько точных значащих цифр можно определить в произведении приближенных чисел $2{,}18 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}175$? Вычислить эти цифры.

16. Найти объем комнаты, если размеры ее $15{,}4 \times 12{,}6 \times 4{,}5$. Какова относительная погрешность произведения?

17. Для определения удельного веса тела было установлено, что вес его 117,8 *г*; при погружении в воду тело вытеснило 54,7 *см*^{3}. С какой точностью можно определить удельный вес тела?

18. С какой относительной погрешностью можно вычислить объем цилиндра, если радиус основания $r = 15{,}4$ *см*, высота $H = 28{,}2$ *см*?

19. С площади 32,4 *га* собрано 4580 *ц* ржи. По скольку центнеров в среднем собрано с 1 *га*?

20. Грубо приближенное значение радиуса цилиндра — 20 *см*, высоты — 30 *см*. С какой точностью надо выполнить измерение, чтобы относительная погрешность при вычислении объема не превышала 1%?