ГЛАВА XII
ПРОГРЕССИИ

§ 123. Числовая последовательность

Пример 1. Из геометрии известно, что сумма внутренних углов выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, определяется по формуле

$$S_n = 2d(n-2);$$

здесь n может принимать лишь натуральные значения, т. е. целые и положительные, начиная с $n=3$, так как наименьшее число сторон многоугольника — три.

Давая n значения: $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$, получим соответствующие значения для суммы углов S_n:

$$S_n = 2d,\ 4d,\ 6d,\ 8d,\ 10d, \ldots$$

Пример 2. При отправке телеграммы взимается плата в размере 3 коп. за каждое слово. Выразить формулой стоимость телеграммы как функцию количества слов, содержащихся в ней.

Очевидно, что если обозначим количество слов через n, стоимость через S, то имеем

$$S = 3n.$$

В приведенных двух примерах мы имели дело с функциями, для которых допустимыми значениями аргумента являются только натуральные числа: $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

В этих случаях функция является *функцией натурального аргумента*. Всякая такая функция называется *последовательностью*. Приведем еще другие примеры последовательностей.

Пример 3. Если возвести каждое натуральное число в квадрат, то получим последовательность квадратов натуральных чисел: 1, 4, 9, 16, ..., n^2, ...

Пример 4. Каждому натуральному числу можно сопоставить обратное ему число; эти обратные числа образуют последовательность

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Пример 5. При извлечении квадратного корня из числа 2 с точностью до 1, до 0,1, до 0,01 и т. д. получается последовательность приближенных значений $\sqrt{2}$ по недостатку:

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots$$

Определение. *Последовательностью* называется функция натурального аргумента. Значения этой функции называются *членами последовательности*.

Каждому натуральному числу соответствует вполне определенное значение этой функции, т. е. вполне определенный член последовательности. Последовательность может быть задана формулой, определяющей каждый член последовательности по номеру этого члена, например формула

$$S = \frac{n}{n^2+1}$$

определяет последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \ldots \quad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots).$$

В некоторых случаях последовательность задается не формулой; это имеет место в приведенном выше примере 5 при рассмотрении последовательности приближенных значений квадратного корня из 2 с неограниченно возрастающей точностью. Здесь формулу заменяет правило, по которому находятся члены этой последовательности; это правило состоит в том, что первый член есть приближенное значение $\sqrt{2}$ по недостатку с точностью до 1, второй — с точностью до 0,1, третий — с точностью до 0,01 и т. д. Вообще n-й член последовательности есть приближенное значение $\sqrt{2}$ по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^{n-1}}$.

Последовательность называется *возрастающей*, если каждый следующий ее член больше предыдущего; таковы, например, последовательности

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \ \ldots, \ n^2, \ \ldots,$$

$$1, \quad 1{,}4, \quad 1{,}41, \quad 1{,}414, \ \ldots,$$

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{7}, \quad \frac{4}{9}, \ \ldots, \ \frac{n}{2n+1}, \ \ldots$$

Последовательность называется *убывающей*, если каждый следующий ее член меньше предыдущего. Такими, например, будут последовательности

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \ \ldots, \ \frac{1}{n}, \ \ldots,$$

$$-1, \quad -10, \quad -100, \quad -1000, \ \ldots, \ -10^{n-1}, \ \ldots$$

Последовательность

$$1, \quad -3, \quad 5, \quad -7, \quad 9, \quad -11, \ \ldots$$

не является ни возрастающей, ни убывающей.

Примечание. Число членов последовательности предполагается неограниченным (бесконечным), т. е. за каждым ее членом следуют другие.

Иногда при решении некоторых задач приходится рассматривать последовательности с конечным числом членов; например, если требуется найти сумму первых 20 четных чисел натурального ряда, то в данном случае речь идет о последовательности 2, 4, 6, ..., 40, общий член которой $a_n = 2n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots, 20)$.

Такие последовательности называются *конечными* (в отличие от бесконечных).

§ 124. Арифметическая прогрессия

Рассмотрим следующие две последовательности:

$$4, \quad 7, \quad 10, \quad 13, \quad 16, \ \ldots,$$

$$8, \quad 3, \quad -2, \quad -7, \quad -12, \ \ldots$$

Закон составления их один и тот же; разность между любым членом последовательности и ближайшим ему слева (предыдущим) есть величина постоянная. В первом примере эта разность равна: $7 - 4 = 10 - 7 = \ldots = 3$; во втором примере имеем $3 - 8 = -2 - 3 = -7 - (-2) = \ldots = -5$.

Определение. *Арифметической прогрессией* называется последовательность чисел, в которой каждый следующий член получается из предыдущего прибавлением к нему одного и того же числа, называемого *разностью прогрессии*. Разность прогрессии обозначается буквой d; следовательно, в первом примере $d=3$; во втором примере $d=-5$. Члены арифметической прогрессии обозначаются a_1, a_2, a_3 и т. д.; в первом примере $a_1=4$; $a_2=7$; $a_3=10$.

Если $d>0$, то прогрессия возрастающая, при $d<0$ — убывающая. Чтобы показать, что данная последовательность есть арифметическая прогрессия, ставят впереди нее знак ÷, например: ÷ 7, 9, 11, 13, ...

Если $d=0$, то все члены прогрессии равны между собой. Изучение таких прогрессий интереса не представляет.

§ 125. Формула любого члена арифметической прогрессии

По определению прогрессии имеем:

$$a_2=a_1+d;$$
$$a_3=a_2+d=a_1+2d;$$
$$a_4=a_3+d=a_1+3d.$$

Можно подметить такую закономерность: чтобы получить член арифметической прогрессии с номером k, надо прибавить к первому члену разность d, умноженную на число членов, предшествующих определяемому:

$$a_k=a_1+(k-1)d \qquad (1)$$

(члену a_k предшествуют $(k-1)$ членов). Но это пока наше предположение, справедливость равенства (1) еще не доказана.

Докажем, что если справедливо равенство (1), то справедливо также и равенство

$$a_{k+1}=a_1+kd. \qquad (2)$$

Действительно,

$$a_{k+1}=a_k+d=a_1+(k-1)d+d=a_1+kd,$$

и справедливость равенства (2) доказана.

Непосредственно мы убедились в том, что при $k=2$ и $k=3$ формула (1) верна, тогда она по доказанному верна также при $k=4$, а раз верна при $k=4$, то верна также и при $k=5$ и вообще верна при любом $k=n$. Поэтому

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

§ 126. Среднее арифметическое

Пусть a_{k-1}, a_k, a_{k+1} — три последовательных члена арифметической прогрессии. Тогда по свойству прогрессии имеем:

$$a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k;$$

$$2a_k = a_{k-1} + a_{k+1};$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Полусумма двух чисел называется их *средним арифметическим*; следовательно, *любой член арифметической прогрессии* (кроме первого) *есть среднее арифметическое двух смежных с ним членов.*

Пример. Между числами 8 и 20 вставить 7 средних арифметических. Это значит, что надо найти 7 таких чисел, которые вместе с данными числами 8 и 20 образовали бы арифметическую прогрессию; первым членом этой прогрессии является число 8, 9-м — число 20. Имеем

$$a_9 = a_1 + 8d; \quad 20 = 8 + 8d, \quad d = 1{,}5.$$

Искомая прогрессия:

$$\div\, 8;\ 9{,}5;\ 11;\ 12{,}5;\ 14;\ 15{,}5;\ 17;\ 18{,}5;\ 20.$$

Этот пример можно обобщить: если нужно вставить k средних арифметических между числами a и b, то имеем

$$b = a + (k+1)d, \quad d = \frac{b-a}{k+1}.$$

По первому члену и разности d можно написать остальные члены.

§ 127. Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии

Предварительно отметим одно свойство арифметической прогрессии с конечным числом членов.

Пусть имеем

$$\div\, 2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32,\ 37.$$

Сложим члены, равноотстоящие от начала и конца прогрессии: $2+37=39$; $7+32=39$; $12+27=39$; $17+22=39$; замечаем, что *сумма двух членов арифметической прогрессии, равноотстоящих от концов, равна сумме крайних членов.*

Так оно и должно быть: первые слагаемые этих сумм (т. е. 2, 7, 12, 17) возрастают на 5; зато вторые слагаемые (37, 32, 27, 22) убывают на 5; от этого сумма каждой пары слагаемых остается без изменения.

Перейдем к выводу формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии. Обозначим эту сумму через S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \qquad (1)$$

Если слагаемые в правой части равенства напишем в обратном порядке, то сумма S_n от этого не изменится:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1. \qquad (2)$$

Сложим почленно равенства (1) и (2); получим

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

В каждой скобке имеем сумму двух членов, равноотстоящих от концов прогрессии; следовательно, все эти суммы в скобках равны между собой и каждая из них равна сумме крайних членов $a_1 + a_n$; таких скобок всего n, т. е. столько, сколько членов прогрессии. Поэтому имеем

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n;$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна полусумме крайних членов, умноженной на число членов.

Если воспользоваться выражением общего члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + (n-1)d$, то формуле суммы можно придать другой вид:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2}\, n;$$
$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\, n.$$

Этой формулой удобно пользоваться, если нужно найти число членов прогрессии по данным a_1, d и S_n.

§ 128. Геометрическая иллюстрация суммы S_n

Дадим геометрический вывод формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Прежде всего заметим следующее: если основание прямоугольника равно единице, то площадь прямоугольника выражается тем же числом, что и его высота.

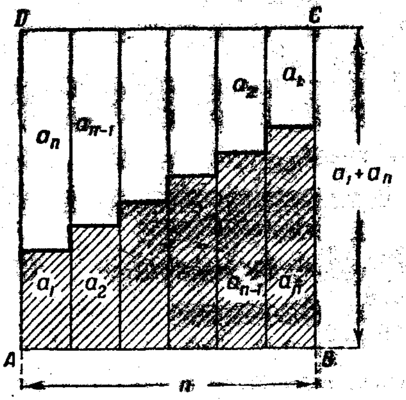

Рис. 95.

Строим n прямоугольников с высотами, равными членам арифметической прогрессии (рис. 95); основание каждого прямоугольника равно единице; все прямоугольники плотно приставлены друг к другу. Получим ступенчатую фигуру (на чертеже заштрихована), площадь ее численно равна S_n. Если к заштрихованной фигуре пристроить такую же фигуру, но перевернутую, то получится прямоугольник $ABCD$ с основанием $AB=n$, высотой $AD=a_1+a_n$; площадь ступенчатой фигуры есть половина прямоугольника, т. е. $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

§ 129. Примеры на применение формулы суммы S_n

Пример 1. Найти сумму первых n чисел натурального ряда. Имеем: $a_1=1$; $a_n=n$; число членов также равно n; по первой формуле суммы можно написать

$$S_n=\frac{(1+n)n}{2}.$$

Пример 2. Найти сумму 10 членов прогрессии:

$$\div 18,\ 14,\ 10,\ 6,\ \ldots$$

В данном случае $d=14-18=-4$; $a_1=18$; $n=10$. По второй формуле суммы имеем

$$S_{10}=\frac{2\cdot 18+9\cdot(-4)}{2}\cdot 10;\quad S_{10}=0.$$

Пример 3. Четвертый член прогрессии 9, девятый член равен —6. Сколько нужно взять членов, чтобы сумма их равнялась 54?

$$\begin{aligned} a_9 &= -6, \quad \text{или} \quad a_1 + 8d = -6 \\ a_4 &= 9, \quad \text{или} \quad \underline{a_1 + 3d = 9} \\ & \qquad\qquad\qquad\quad 5d = -15; \end{aligned}$$

$$d = -3;$$

$$9 = a_1 + 3 \cdot (-3);$$

$$a_1 = 18.$$

По второй формуле суммы имеем

$$54 = \frac{2 \cdot 18 + (n-1) \cdot (-3)}{2} n;$$

$$108 = (36 - 3n + 3) n;$$

$$36 = (13 - n) n;$$

$$n^2 - 13n + 36 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим

$$n_1 = 4; \; n_2 = 9.$$

Оба ответа удовлетворяют условию задачи, что обнаруживается при проверке:

$$\div 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0, -3, -6; \quad S_4 = 54;$$

$S_9 = S_4 + 0 = 54$, так как сумма последних пяти членов равна нулю. Такое положение, очевидно, будет иметь место, если прогрессия имеет члены, противоположные по знаку, но равные по абсолютной величине.

§ 130. Сумма квадратов первых n чисел натурального ряда

Обозначим сумму первых n чисел натурального ряда через S_1, а сумму их квадратов через S_2, так что

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n;$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2.$$

Если в тождестве

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

будем последовательно давать n значения 1, 2, 3, 4, ..., n, то получим

$$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1;$$
$$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1;$$
$$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1;$$
$$5^3-4^3=3\cdot4^2+3\cdot4+1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1;$$
$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1.$$

Складываем почленно эти равенства:

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2)+$$
$$+3(1+2+3+4+\dots+n)+n,$$

или

$$(n+1)^3-1^3=3S_2+3S_1+n. \qquad (3)$$

Но

$$S_1=\frac{(n+1)n}{2}.$$

Подставим значение S_1 в равенство (3), получим

$$n^3+3n^2+3n=3S_2+\frac{3n(n+1)}{2}+n,$$

откуда

$$6S_2=2(n^3+3n^2+3n)-3n^2-3n-2n=2n^3+3n^2+n=$$
$$=n(n+1)(2n+1);$$

$$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Подобным же образом можно найти сумму кубов первых n чисел натурального ряда, если исходить из тождества

$$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1;$$

получим

$$S_3=\left[\frac{(1+n)n}{2}\right]^2=S_1^2.$$

§ 131. Геометрическая прогрессия

Определение. Последовательность чисел, в которой каждый следующий член равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число, называется *геометрической прогрессией*. Приведем примеры геометрических прогрессий:

$$1, \quad 2, 4, 8, \quad 16, 32, \ldots;$$

$$27, \quad 9, 3, 1, \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots;$$

$$12, -6, 3, \quad -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$$

Каждый член первой последовательности, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на 2; во втором примере последующий член получается из предыдущего умножением на $\frac{1}{3}$, в третьем примере — умножением на $-\frac{1}{2}$.

Число, на которое надо умножить предыдущий член, чтобы получить последующий, называется *знаменателем прогрессии*. Знаменатель прогрессии обозначается буквой q. Члены геометрической прогрессии, аналогично членам арифметической прогрессии, будем обозначать a_1, a_2, a_3 и т. д. Геометрическую прогрессию будем обозначать знаком $\div\div$, поставленным впереди ее членов.

Если знаменатель прогрессии q больше 1, то прогрессия является возрастающей при $a_1 > 0$ и убывающей при $a_1 < 0$. Если $q = 1$, то все члены геометрической прогрессии равны между собой. Такие прогрессии интереса не представляют.

В приведенных выше примерах первая прогрессия возрастающая, вторая — убывающая, а третья не является ни возрастающей, ни убывающей (здесь последующий член бывает то больше, то меньше предыдущего).

§ 132. Формула любого члена геометрической прогрессии

По определению геометрической прогрессии имеем:

$$a_2 = a_1q;$$
$$a_3 = a_2q = a_1q^2;$$
$$a_4 = a_3q = a_1q^3.$$

Выявляется определенная закономерность: чтобы получить член геометрической прогрессии с определенным номером, нужно первый член прогрессии умножить на знаменатель прогрессии с показателем, равным числу предшествующих членов. Допустим, что этот закон справедлив для члена с номером k:

$$a_k = a_1q^{k-1}; \qquad (1)$$

докажем, что тогда

$$a_{k+1} = a_1q^k. \qquad (2)$$

Действительно, по определению геометрической прогрессии имеем

$$a_{k+1}=a_kq=a_1q^{k-1}q=a_1q^k,$$

и равенство (2) доказано.

Справедливость равенства (1) непосредственно проверена нами вплоть до значения $k=4$. Тогда, по доказанному, оно верно и при $k=5$, а раз справедливо при $k=5$, то верно и при $k=6$ и т. д., и вообще оно верно при любом натуральном значении $k=n$:

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

Любой член геометрической прогрессии равен первому члену, умноженному на знаменатель прогрессии с показателем степени, равным числу членов, предшествующих определяемому.

Пример 1. Найти 8-й член прогрессии:

$$\because 1,\ 3,\ 9,\ 27,\ \ldots$$

В этом примере $a_1=1$; $q=3$; поэтому

$$a_8=a_1q^7;$$
$$a_8=1\cdot 3^7=2187.$$

Пример 2. Найти 10-й член прогрессии:

$$2,\ -\sqrt{2},\ 1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ldots$$

Знаменатель $q=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $a_1=2$.

$$a_{10}=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9=-2\cdot\frac{2^4\sqrt{2}}{2^9}=-\frac{\sqrt{2}}{16}.$$

§ 133. Среднее геометрическое

Пусть a_{k-1}, a_k, a_{k+1} — три последовательных члена геометрической прогрессии, где индекс k — любое натуральное число, большее 1. Тогда имеем

$$\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{a_{k+1}}{a_k};$$

каждое из этих соотношений равно знаменателю прогрессии q. По свойству пропорции имеем

$$a_k^2=a_{k-1}\cdot a_{k+1}.$$

Число, квадрат которого равен произведению двух данных чисел, называется их *средним геометрическим*; например, число 6 есть среднее геометрическое чисел 4 и 9, так как $6^2 = 4 \cdot 9$.

Таким образом, *любой член геометрической прогрессии есть среднее геометрическое двух смежных с ним членов.*

Пример. Между числами 2 и 1458 вставить пять средних геометрических.

Условие задачи надо понимать так: требуется найти пять таких чисел, которые вместе с данными числами 2 и 1458 образовали бы геометрическую прогрессию с 1-м членом $a_1 = 2$ и 7-м членом $a_7 = 1458$.

Имеем:

$$a_7 = a_1 q^6;$$

$$1458 = 2q^6; \quad 729 = q^6;$$

$$q = \sqrt[6]{729} = \pm 3.$$

Возможны две прогрессии:

$$\div\div 2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ 486,\ 1458$$

или

$$\div\div 2,\ -6,\ 18,\ -54,\ 162,\ -486,\ 1458.$$

§ 134. Сумма первых n членов геометрической прогрессии

Обозначим сумму первых n членов геометрической прогрессии через S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n. \tag{4}$$

Умножим обе части равенства (4) на q; получим

$$S_n q = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \ldots + a_{n-1} q + a_n q; \tag{5}$$

так как

$$a_1 q = a_2, \quad a_2 q = a_3, \ \ldots, \ a_{n-1} q = a_n,$$

то равенство (5) примет вид

$$S_n q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n q. \tag{6}$$

Вычитаем из равенства (6) равенство (4):

$$S_n q - S_n = a_n q - a_1,$$

$$S_n (q - 1) = a_n q - a_1,$$

откуда

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} \quad (q \neq 1).$$

Формулу суммы можно представить в другом виде, если в ней a_n заменить через $a_1 q^{n-1}$; получим

$$S_n = \frac{a_1 q^{n-1} q - a_1}{q-1} = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1};$$

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1} \quad (q \neq 1). \qquad (7)$$

Если знаменатель прогрессии $|q| < 1$, то удобнее писать формулу так:

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1-q},$$

чтобы числитель и знаменатель дроби были положительны при $a_1 > 0$. Решим старинную задачу, относящуюся к XVIII веку.

Задача. Некто продает лошадь с условием, чтобы за первый гвоздь подковы был уплачен 1 грош, за второй гвоздь — 2 гроша, за третий — 4 гроша и т. д. Всех подковных гвоздей у лошади 32. Спрашивается, во сколько он ценит лошадь?

Очевидно, надо найти сумму 32 членов геометрической прогрессии, первый член которой $a_1 = 1$; знаменатель $q = 2$:

$$a_{32} = 1 \cdot 2^{31};$$

$$S_{32} = \frac{2 \cdot 2^{31} - 1}{2-1} = 2^{32} - 1 = 4\,294\,967\,295 \text{ (грошей)}.$$

В переводе на рубли это составит около 2,15 млн. руб. Цена фантастическая.

Пример. Сумма первых трех членов прогрессии равна 6, а сумма 2-го, 3-го и 4-го членов равна —3. Найти прогрессию. Запишем условие:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 6;$$

$$a_2 + a_3 + a_4 = -3.$$

Выражая члены прогрессии через первый, получим

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 6, \quad \text{или} \quad a_1 (1 + q + q^2) = 6; \qquad (8)$$

$$a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 = -3, \quad \text{или} \quad a_1 q (1 + q + q^2) = -3. \qquad (9)$$

Разделим равенство (9) на равенство (8); получим: $q=-\frac{1}{2}$. Первый член находим из соотношения

$$a_1=\frac{6}{1+q+q^2}=\frac{6}{\frac{3}{4}}=8.$$

Искомая прогрессия: $\div 8;\ -4;\ 2;\ -1;\ \ldots$

Упражнения

1. Написать несколько первых членов последовательности, если общий член выражается формулой $a_n=\frac{1}{n+1}$.

2. Та же задача при условии, что: 1) $a_n=\frac{n}{3n+1}$; 2) $a_n=\frac{1}{2^n-1}$; 3) $a_n=(-1)^n\frac{1}{n^2+1}$; 4) $a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}$.

3. Подобрать по возможности простую формулу для общего члена следующих последовательностей: 1) 1, 3, 5, 7, 9, ...; 2) $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}, \ldots$; 3) $a^2, a^4, a^6, \ldots$.

4. Какие из следующих последовательностей представляют арифметическую прогрессию: 1) 3, 6, 9, 12, ...; 2) 1, 8, 27, 64, ... 3) 1, 3, 7, 15, 31, ...; 4) 5, 3, 1, —1, —3, ...?

5. Дана прогрессия

$$\div 3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \ldots$$

Найти: 1) 7-й член; 2) k-й член.

6. В прогрессии

$$\div 5,\ 2,\ -1,\ -4,\ \ldots$$

найти: 1) a_{12}; 2) a_n.

7. Найти общий член прогрессии

$$\div 3b,\ 5b,\ 7b,\ \ldots \qquad (b\neq 0).$$

8. Дана прогрессия

$$\div 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots$$

Если вычеркнуть в ней члены, стоящие на четных местах, то какую последовательность чисел образуют оставшиеся члены?

9. Между числами 4 и 40 вставить 8 средних арифметических.

10. Диаметры шкивов, насаженных на общий вал, образуют арифметическую прогрессию из пяти членов, крайние члены которой равны 120 *мм* и 216 *мм*; найти диаметры промежуточных шкивов.

11. Найти сумму 12 членов прогрессии

$$\div 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ \ldots$$

12. Сколько раз пробьют часы за сутки, если они отбивают и получасы?

13. Показать, что сумма первых n нечетных чисел есть точный квадрат.

14. Заполнить пустые места следующей таблицы:

	a_1	a_n	d	n	S_n
1	7	39		9	
2	8		—2		14
3	31		—7	10	
4	1	61	5		
5			12	40	9400
6	2		3		442
7		22	0,4	43	
8		25,7	1,3		266
9	—4,5	100			955
10		—15		11	0

15. Сумма 2-го и 5-го членов прогрессии равна 14, сумма 3-го и 7-го равна 8. Найти прогрессию.

16. Сумма 3-го и 6-го членов прогрессии равна 3, а сумма их квадратов равна 45. Найти прогрессию.

17. Купецкий некто человек, имяще 14 чарок сребряных, ихже каяждо превышает тягостию по чину прогрессии четырьмя лотами, а последняя чарка весит 59 лотов. И ведательно есть, колико все чарки веса имуть. (Из арифметики Магницкого (1703 г.).)

18. При свободном падении в пустоте тело проходит в первую секунду приблизительно 4,9 *м*, а в каждую следующую секунду на 9,8 *м* больше. Какой путь пройдет тело за 10 сек.? Какой путь пройден в последнюю секунду?

19. Какое натуральное число равно сумме всех ему предшествующих натуральных чисел?

20. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 16. Произведение первого на второе равно $12\frac{4}{9}$. Найти эти числа.

21. Шестой член арифметической прогрессии составляет 60% от третьего члена той же прогрессии, а произведение их равно 15. Сколько нужно взять членов этой прогрессии, чтобы сумма их равнялась $30\frac{1}{3}$?

22. Дана прогрессия

$$\div 3;\ 3{,}2;\ 3{,}4;\ 3{,}6;\ \ldots$$

Начиная с какого номера члены ее будут больше 1000?

23. Показать, что последовательность, общий член которой выражается формулой $a_n = 2 \cdot 3^n$, есть геометрическая прогрессия. Написать первые четыре члена этой прогрессии.

24. Определить 10-й член прогрессии

$$\div\div 2,\ 4,\ 8,\ \ldots$$

25. Чему равен 7-й член прогрессии

$$\div 15, -5, \frac{5}{3}, \ldots$$

26. Чему равен знаменатель геометрической прогрессии: 1) $2, \sqrt{2}, 1, \ldots$; 2) $a^n, a^{n-1}, a^{n-2}, \ldots$ $(a > 0)$?

27. Между числами 12 и 972 вставить три средних геометрических.

28. Между числами 5 и 20 вставить четыре средних геометрических.

29. Найти сумму десяти членов прогрессии, если

$$1)\ a_1 = 3;\ q = 2;\ 2)\ a_1 = 8;\ q = \frac{1}{4}.$$

30. Найти знаменатель и сумму семи членов геометрической прогрессии, если $a_1 = 36$; $a_7 = \frac{4}{81}$.

31. Дано: $S_7 = 2186$; $q = 3$. Найти a_1 и a_7.

32. Найти число членов геометрической прогрессии, если

$$a_1 = 3;\ q = 2;\ S_n = 189.$$

33. Найти знаменатель прогрессии, если $a = 1$; $n = 3$; $S_3 = 157$.

34. Дана геометрическая прогрессия, в которой

$$a_1 + a_2 = 9;\ a_1 - q = 2\frac{3}{4}.$$

Найти a_3.

35. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 65. Если отнять от меньшего числа 1, от большего 19, то вновь полученные числа составляют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

36. Найти четыре числа, зная, что первые три из них составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую. Известно, что $q = 2$; $d = 6$.

37. Найти четыре положительных числа, составляющих геометрическую прогрессию, если $a_1 + a_2 = 15$; $a_3 + a_4 = 60$.

38. Показать, что если три положительных числа a, b и c образуют геометрическую прогрессию, то

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3.$$

$b^2 = ac$, $\quad a^2 ac \cdot c^2 \cdot \frac{b^3c^3 + a^3c^3 + a^3b^3}{a^3b^3c^3} =$

$\Downarrow$

$b^6 = a^3c^3 \quad = \frac{b^3(a^3+c^3) + a^3c^3}{b^3} = a^3 + c^3 + \frac{b^6}{b^3} =$

$= a^3 + b^3 + c^3$