ГЛАВА XV

СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ, СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ

§ 178. Формула сложных процентов

Если причитающиеся за вклад процентные деньги в конце операционного года присоединяются к вкладу и на наращенную сумму в дальнейшем начисляются проценты, то говорят, что на вклад начисляются *сложные проценты* («проценты на проценты»).

Сберкассы Советского Союза начисляют процентные деньги по сложным процентам.

Задача. В какую сумму обратится в течение t лет вклад a рублей, если сберкасса ежегодно начисляет p сложных процентов?

Решение. Каждый рубль вклада по истечении года приносит дохода $\frac{p}{100}$ руб.; следовательно, в конце года каждый рубль обратится в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ руб., a руб. обратятся через год в сумму $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ руб. В течение второго года каждый рубль обратится в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ руб., а сумма $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$, образовавшаяся к концу первого года, обратится в конце второго года в

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

Продолжая эти рассуждения, найдем, что вклад a руб. в конце третьего года обратится в сумму $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$ руб., вклад a в конце четвертого года обратится в сумму

$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^4$ руб., вклад a в конце t-го года обратится в сумму $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ руб.

Если обозначим этот наращенный вклад буквой A, то имеем такую формулу:

$$A=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$

Это и есть формула сложных процентов; она связывает четыре величины: A, a, p и t. Если три величины известны, то четвертая может быть найдена; следовательно, всего возможны четыре типа задач на сложные проценты. Для облегчения вычислений в таблицах Брадиса на стр. 25 даны $\lg\left(1+\frac{p}{100}\right)$ для различных значений p (от $p=0{,}25$ до $p=12{,}5$) с семью десятичными знаками. Если такая точность не нужна, то лишние десятичные знаки всегда можно отбросить.

Пример 1. Какую сумму надо поместить в сберкассу как срочный вклад, чтобы по истечении 20 лет образовалась сумма 2000 руб.?

Примечание. По срочным вкладам доход составляет 3%. В данном случае $A=2000$ руб., $\frac{p}{100}=0{,}03$, $t=20$. Имеем: $2000=a\cdot 1{,}03^{20}$. Логарифмируем:

$$\lg 2000=\lg a+20\lg 1{,}03,$$

$$\lg a=\lg 2000-20\lg 1{,}03,$$

$$\lg a=3{,}3010-20\cdot 0{,}0128,$$

$$\lg a=3{,}3010-0{,}256,$$

$$\lg a=3{,}045;\quad a\approx 1109.$$

Пример. 2. Через сколько лет вклад a руб. (срочный) утроится?

Имеем: $A=3a$, $\frac{p}{100}=0{,}03$; отсюда $3a=a\cdot 1{,}03^t$; сокращаем на a; это означает, что величина вклада не влияет на ответ:

$$3=1{,}03^t;\quad \lg 3=t\lg 1{,}03,$$

$$t=\frac{\lg 3}{\lg 1{,}03}=\frac{0{,}4771}{0{,}0128}\approx 35{,}7 \text{ года.}$$

Формула сложных процентов $A=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ отображает скачкообразный характер изменения наращенного вклада A, так как время t принимает лишь целые значения: $t=0, 1, 2, \ldots$ Однако можно себе представить следующий процесс: период обращения вклада делается все меньше и меньше и наросшие процентные деньги за все уменьшающиеся части года присоединяются к основному вкладу и на них начисляются проценты. Тогда изменение наращенного вклада станет процессом органического роста, и формула

$$A=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$$

перейдет в $A=Ca^{kt}$, где величина A будет показательной функцией времени t.

Формула сложных процентов находит применение не только в финансовых вопросах; ею пользуются для определения численности населения страны или города, роста поголовья скота и в других вопросах.

§ 179. Срочные уплаты

Если долг вместе с нарастающими процентами погашается в течение известного числа лет равными ежегодными взносами, то такие взносы называются *срочными уплатами*.

Задача. По скольку надо платить ежегодно, чтобы погасить ссуду A рублей в течение n лет при p сложных процентах? Обозначим срочную уплату, вносимую в конце каждого года, через x (руб.); наращенный в течение года рубль — через r, т. е. $1+\frac{p}{100}=r$; тогда долг A руб. через год обратится в Ar руб., после уплаты долг будет равен $Ar-x$. К концу второго года $(Ar-x)$ руб. долга обратятся в сумму $(Ar-x)r$ руб. $=(Ar^2-rx)$ руб.; после уплаты второго взноса долг равен (Ar^2-rx-x) руб.

Продолжая эти рассуждения дальше, найдем, что долг в конце третьего года после очередной уплаты взносов равен

$$Ar^3-r^2x-rx-x,$$

в конце четвертого года

$$Ar^4-r^3x-r^2x-rx-x,$$

в конце n-го года

$$Ar^n-r^{n-1}x-r^{n-2}x-\ldots-rx-x.$$

По условию задачи долг в конце n-го года должен быть равен нулю; отсюда имеем уравнение

$$Ar^n - r^{n-1}x - r^{n-2}x - \ldots - r^2x - rx - x = 0,$$
$$Ar^n = x(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r^2 + r + 1).$$

Выражение в скобках представляет сумму n членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, знаменатель равен r; поэтому $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$.

$$Ar^n = x\frac{1-r^n}{1-r}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{Ar^n(1-r)}{1-r^n}.$$

Это и есть формула срочных уплат.

Пример. По скольку надо платить ежегодно, чтобы погасить ссуду 5000 рублей при 2% (сложных) в течение 20 лет? В данном случае $A = 5000$; $n = 20$; $p = 0{,}02$; $r = 1{,}02$. Поэтому

$$x = \frac{5000 \cdot 1{,}02^{20} \cdot (-0{,}02)}{1-(1{,}02)^{20}} \approx 306 \text{ руб.}$$

§ 180. Срочные взносы

Задача. В начале каждого года рабочий вносит в сберкассу по a руб. Какая сумма окажется у него на сберкнижке через n лет, если начисление дохода (процентных денег) ведется из расчета p сложных процентов?

Путем рассуждений, аналогичных тем, что даны в предыдущем параграфе, найдем:

в конце 1-го года сумма будет ar,

» » 2-го » » » $ar^2 + ar$,

» » 3-го » » » $ar^3 + ar^2 + ar$,

в конце n-го года будет $ar^n + ar^{n-1} + \ldots + ar^2 + ar$,

$$A = ar^n + ar^{n-1} + ar^{n-2} + \ldots + ar^2 + ar,$$
$$A = ar(r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + \ldots + r + 1),$$
$$A = ar\frac{1-r^n}{1-r}.$$

Пример. Вкладчик вносит ежегодно по 200 рублей. Какая сумма окажется на сберкнижке по истечении 20 лет из расчета 2% (сложных)? Имеем: $a = 200$; $r = 1{,}02$; $n = 20$.

Поэтому $A = \frac{200 \cdot 1{,}02 \cdot [1-(1{,}02)^{20}]}{1-1{,}02} \approx 4960.$

§ 181. Соединения

В следующих параграфах речь будет идти о различных предметах, которые будем называть просто *элементами*. Так, например, элементами могут быть: 1) учащиеся данной группы; 2) цифры: 0, 1, 2, ...; 3) заданные точки на плоскости и т. д.

Из различных элементов можно образовать группы, или *соединения*. В зависимости от того, входят ли *все элементы* в каждое соединение или только *определённое число* их, играет ли роль *порядок* элементов или нет, различают три вида соединений: 1) *размещения*, 2) *перестановки* и 3) *сочетания*.

§ 182. Размещения

Задача. Сколько можно образовать различных трехзначных чисел, пользуясь девятью значащими цифрами, если ни одна из цифр не повторяется в одном и том же числе? Элементами в данной задаче являются девять значащих цифр, из них надо образовать всевозможные соединения (группы) по три элемента в каждом соединении (трехзначное число изображается тремя цифрами); порядок элементов в каждом соединении играет существенную роль: например, числа 325, 235, 523 различны, хотя изображаются одними и теми же цифрами. В данном случае говорят, что решение задачи сводится к составлению всех размещений из девяти элементов по три в каждом.

Определение. *Размещениями из n элементов по m в каждом* ($n \geqslant m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит m элементов; одно соединение отличается от другого или составом элементов, или порядком их.

Число всех размещений из n элементов по m в каждом обозначается символом A_n^m; например, A_9^3 означает число всех размещений из девяти элементов по три элемента в каждом.

§ 183. Формула числа размещений

Пусть дано n элементов: $a, b, c, \ldots, k, l$. Ясно, что из них можно образовать всего n размещений по одному элементу в каждом, $A_n^1 = n$.

Чтобы найти A_n^2, поступим следующим образом: к элементу a присоединим по очереди каждый из остальных, получим всего $(n-1)$ пар: $ab, ac, ad, \ldots, ak, al$.

Таким же образом к элементу b приставим последовательно каждый из оставшихся элементов: $a, c, \ldots, k, l$, к элементу c присоединим каждый из оставшихся $(n-1)$ элементов и т. д., пока не дойдем до элемента l.

У нас получится следующая прямоугольная таблица:

$$n \text{ строк} \left\{ \begin{array}{ll} ab,\ ac,\ ad,\ \ldots,\ ak,\ al & (n-1 \text{ размещений}), \\ ba,\ bc,\ bd,\ \ldots,\ bk,\ bl & (n-1 \text{ размещений}), \\ ca,\ cb,\ cd,\ \ldots,\ ck,\ cl & (n-1 \text{ размещений}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ la,\ lb,\ lc,\ ld,\ \ldots,\ lk & (n-1 \text{ размещений}). \end{array} \right.$$

Всего имеем n строк по $(n-1)$ размещений в каждой; следовательно, всего их будет $n(n-1)$.

Итак, $A_n^2 = n(n-1)$.

Чтобы составить всевозможные размещения из n элементов по три, поступим следующим образом: расположим все размещения из n по два, полученные выше, в один столбец; к каждому размещению по два из этого столбца присоединяем последовательно каждый из оставшихся $(n-2)$ элементов, не вошедший в эту пару; получим новую прямоугольную таблицу, в которой будет всего $n(n-1)$ строк по $(n-2)$ размещений в каждой строке:

$$n(n-1) \text{ строк} \left\{ \begin{array}{ll} abc,\ abd,\ \ldots,\ abk,\ abl & (\text{всего } n-2 \text{ размещений}), \\ acb,\ acd,\ \ldots,\ ack,\ acl & (\text{всего } n-2 \text{ размещений}), \\ adb,\ adc,\ \ldots,\ adk,\ adl & (\text{всего } n-2 \text{ размещений}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ lka,\ lkb,\ \ldots & (\text{всего } n-2 \text{ размещений}). \end{array} \right.$$

Следовательно, число всех размещений из n элементов по три будет

$$A_n^3 = n(n-1)(n-2).$$

Применяя предыдущие рассуждения к составлению всевозможных размещений из n элементов по четыре, найдем, что

$$A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Вообще

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(m-1)].$$

Число всевозможных размещений из n элементов по m в каждом равно произведению m последовательно убывающих на единицу целых чисел, из которых большее есть n.

Примеры. 1) $A_5^4=5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2=120$; 2) $A_{12}^2=12 \cdot 11=132$. Теперь легко решить задачу из предыдущего параграфа. Число всех различных трехзначных чисел, которые можно изобразить девятью значащими цифрами, будет

$$A_9^3=9 \cdot 8 \cdot 7=504.$$

Задачи.

1. Сколько можно образовать различных четырехзначных чисел, пользуясь девятью значащими цифрами и цифрой 0, не повторяя ни одну из этих цифр?

Всех элементов в данном случае 10, из них надо составить всевозможные размещения по четыре:

$$A_{10}^4=10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7=5040.$$

Из этого числа надо исключить те размещения, которые начинаются с цифры 0, их будет $A_9^3=9 \cdot 8 \cdot 7=504$.

Следовательно, всего таких чисел можно написать

$$5040-504=4536.$$

2. Учащиеся данного класса изучают восемь учебных предметов; если в расписание занятий включается каждый день по четыре предмета, то сколькими различными способами могут быть распределены уроки в день?

Всевозможные распределения уроков представляют все размещения из восьми по четыре, так как порядок чередования предметов тоже учитывается:

$$A_8^4=8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5=1680.$$

§ 184. Перестановки

Определение. *Перестановками из n элементов* называются такие соединения, в каждое из которых входят все данные n элементов; одна перестановка отличается от другой только порядком элементов. Например, из трех элементов a, b и c можно образовать всего 6 различных перестановок:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Принято число всевозможных перестановок из n элементов обозначать P_n. На перестановки можно смотреть как на особый случай размещений, когда число элементов, входящих в каждое размещение, равно числу всех элементов, т. е. $m=n$. Отсюда имеем такую формулу для числа перестановок из n элементов:

$$P_n=A_n^n=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\underbrace{[n-(n-1)]}_{1},$$

или, написав произведение сомножителей в обратном порядке:

$$P_n=1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(n-2)(n-1)n.$$

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных натуральных чисел от 1 *до n включительно.*

Пример 1. $P_5=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$.

Пример 2. Сколькими различными способами друг относительно друга могут разместиться за столом 10 лиц?

$$P_{10}=1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots10=3\,628\,800.$$

Примечание. Произведение n натуральных чисел от 1 до n сокращенно обозначается так:
$1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)n=n!$ (читается: n-факториал). Например, $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$.

§ 185. Сочетания

Задача. В турнире участвовало 12 шахматистов; каждый из них сыграл с каждым из остальных по одной партии. Сколько всего было сыграно партий?

В этой задаче элементами являются 12 шахматистов; в каждой сыгранной партии участвовало два элемента — два игрока; порядок элементов не играет роли, т. е. в данном случае не учитывается, кто из них играл белыми, кто черными. *Соединения, в которых порядок элементов не играет роли, называются сочетаниями.* Одно сочетание должно отличаться от другого по крайней мере одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается через C_n^m или $\binom{m}{n}$; например, C_8^3 означает число всех сочетаний из восьми элементов по три в каждом. В качестве примера составим все сочетания из пяти элементов a, b, c, d, e по два, они будут:

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ bc,\ bd,\ be,\ cd,\ ce,\ de,$$
$$C_5^2 = 10.$$

Если мы в каждом сочетании из пяти элементов по два произведем всевозможные перестановки элементов, то получим все размещения из тех же пяти элементов по два; их будет в два раза больше, т. е. 20, ибо каждое сочетание порождает два размещения; например, сочетание ab дает два размещения: ab, ba. Но к этому результату мы могли прийти, непосредственно применяя уже известную нам формулу $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Поставим такой вопрос: как по числу всех размещений из n элементов по m в каждом найти число всех сочетаний из тех же n элементов по m?

Для одного частного случая мы этот вопрос разрешили, а именно:

$$C_5^2 = A_5^2 : 2.$$

Возьмем еще другой пример: составим все сочетания из четырех элементов по три; их будет всего четыре:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

Если в каждом из этих сочетаний произведем всевозможные перестановки элементов, то получим все размещения из четырех элементов по три; этих размещений будет во столько раз больше сочетаний, сколько можно образовать перестановок из трех элементов, т. е. $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; следовательно, размещений должно быть всего $4 \cdot 6 = 24$.

Следующая таблица наглядно поясняет сказанное:

abc	abd	acd	bcd
acb	adb	adc	bdc
bac	bad	cad	cbd
bca	bda	cda	cdb
cab	dab	dac	dbc
cba	dba	dca	dcb

Справедливо и обратное: число всех сочетаний из четырех элементов по три в каждом меньше числа размещений из четырех элементов по три во столько раз, сколько можно образовать перестановок из трех элементов, т. е.

$$C_4^3 = A_4^3 : P_3.$$

Если распространить предыдущие рассуждения на общий случай, то будем иметь следующую формулу:

$$C_n^m = A_n^m : P_m,$$

или в раскрытой форме:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}.$$

Пример 1. $C_{12}^2 = \frac{12\cdot 11}{1\cdot 2} = 66.$

Число всех партий, сыгранных участниками турнира, таким образом, равно 66.

Пример 2. Сколько можно провести различных плоскостей через 8 точек пространства, если никакие четыре из них не лежат в одной плоскости?

Плоскость определяется тремя точками, не принадлежащими одной прямой; следовательно, всех плоскостей будет

$$C_8^3 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56.$$

§ 186. Свойство сочетаний

Обратим внимание на следующие вычисления:

1) $C_5^2 = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10, \quad C_5^3 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10;$

2) $C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120, \quad C_{10}^7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 120.$

Таким образом, выходит:

1) $C_5^2 = C_5^3 \quad (2+3=5);$ 2) $C_{10}^3 = C_{10}^7 \quad (3+7=10).$

Можно ожидать на основании подмеченной закономерности, что $C_{15}^{12} = C_{15}^3$, так как сумма верхних индексов в данном случае тоже равна нижнему числу: $12+3=15$. Случайно ли это или нет? Следующие рассуждения подтверждают, что здесь имеет место определенная закономерность.

Предположим, что из имеющихся n элементов мы отобрали m элементов, чтобы образовать одно сочетание; оставшиеся элементы представляют также сочетание по $(n-m)$

из тех же n элементов; всякий раз, как мы образуем новое сочетание из n по m, оставшиеся элементы дадут новое сочетание из тех же n элементов по $(n-m)$; таким образом, каждому сочетанию из n элементов по m соответствует сочетание n из элементов по $(n-m)$. Сколько будет одних, столько же будет и других, т. е.

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Пример. $C_{20}^{18} = C_{20}^{20-18} = C_{20}^2$; $\quad C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190.$

Выведенным свойством удобно пользоваться в тех случаях, когда $m > \frac{n}{2}$, ибо это облегчает вычисления.

§ 187. Бином Ньютона. Предварительные замечания

Двучлен вида $x+a$ называется также *биномом*. Мы знаем, чему равны квадрат и куб двучлена:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2;$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3.$$

Возникает вопрос: нельзя ли получить аналогичные формулы для более высоких степеней двучлена, другими словами, как возвести двучлен в четвертую, пятую и вообще в любую целую положительную степень?

Ответ на поставленный вопрос дает так называемая формула бинома Ньютона, к рассмотрению которой и переходим.

§ 188. Произведение двучленов, отличающихся только вторыми членами

Возьмем несколько двучленов с общим первым членом: $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, ... и будем постепенно перемножать их:

1) $(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab =$
$$= x^2 + (a+b)x + ab;$$

2) $(x+a)(x+b)(x+c) = [x^2+(a+b)x+ab](x+c) =$
$$= x^3 + (a+b)x^2 + abx + cx^2 + c(a+b)x + abc =$$
$$= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc;$$

3) $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=$

$$=[x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc](x+d)=$$

$$=x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+$$

$$+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$$

Если внимательно присмотреться к полученным результатам, то можно усмотреть закон образования этих произведений:

1) каждое произведение представляет собой многочлен, расположенный по убывающим степеням буквы x;

2) степень этого многочлена равна числу перемножаемых двучленов;

3) у буквы x показатель степени последовательно убывает на единицу;

4) всех членов в правой части на единицу больше, чем число перемножаемых двучленов;

5) коэффициент первого члена есть 1, коэффициент второго члена равен сумме всех вторых членов; коэффициент третьего члена есть сумма всех произведений из вторых членов, взятых по два; коэффициент четвертого члена представляет собой сумму произведений из вторых членов, взятых по три. Последний член есть произведение всех вторых членов.

Можно доказать (чего мы не делаем), что отмеченный закон остается справедливым для произведения какого угодно числа двучленов. Предположим, что имеем всего n двучленов; тогда их произведение может быть записано в следующем виде:

$$\underbrace{(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)}_{\text{всего } n \text{ двучленов}}=$$

$$=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+S_3x^{n-3}+\ldots+S_n, \quad (1)$$

где

$S_1=a+b+c+\ldots+k$ (сумма всех вторых членов);

$S_2=ab+ac+\ldots+ak+\ldots$ (сумма всех произведений из вторых членов, взятых по два);

$S_3=abc+abd+\ldots$ (сумма всех произведений из вторых членов по три);

. . . .

$S_n=abc\ldots k$ (произведение всех вторых членов).

Допустим, что все вторые члены двучленов равны между собой, т. е. $a=b=c=\ldots=k$; тогда левая часть формулы (1) переходит в $(x+a)^n$, в правой части коэффициенты $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ примут вид

$$S_1=\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{n \text{ слагаемых}}=na,$$

$$S_2=\underbrace{a^2+a^2+\ldots+a^2}_{\text{всего } \frac{n(n-1)}{2} \text{ слагаемых}}=\frac{n(n-1)}{2}a^2,$$

так как всех парных произведений будет столько, сколько можно образовать сочетаний из n по два, т. е. $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$. Подобным образом

$$S_3=\underbrace{a^3+a^3+\ldots+a^3}_{\text{всего } \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \text{ слагаемых}},$$

ибо каждое слагаемое обращается в a^3, число этих слагаемых равно числу сочетаний из n по три, т. е.

$$C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Последний член $S_n=a^n$. Окончательно имеем

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2x^{n-2}+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{n-3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}a^kx^{n-k}+\ldots+a^n.$$

Это и есть *формула бинома Ньютона*; правая часть ее носит название *разложения* бинома.

Пример.

$$(x+a)^5=x^5+5ax^4+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}a^2x^3+$$
$$+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^2+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^4x+a^5=$$
$$=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5.$$

Пользуясь символом числа сочетаний, можно записать сокращенно формулу (1) так:

$$(x+a)^n=x^n+C_n^1ax^{n-1}+C_n^2a^2x^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+C_n^ka^kx^{n-k}+\ldots+C_n^{n-1}a^{n-1}x+C_n^na^n.$$

§ 189. Свойства формулы бинома

1. *Число всех членов разложения равно* $n+1$, так как разложение содержит все степени буквы x от 0 до n включительно.

2. Показатель у буквы x последовательно уменьшается на единицу, а у буквы a возрастает на единицу, вследствие чего *сумма показателей при* x *и* a *в каждом члене остается одна и та же, равная показателю степени бинома* n.

3. Коэффициент у первого члена равен единице, у второго члена — числу сочетаний из n элементов по одному, у третьего члена — числу сочетаний из n по два, у четвертого — числу сочетаний из n элементов по три и т. д., у $(k+1)$-го члена разложения коэффициент равен C_n^k; коэффициент последнего члена равен 1. Эти коэффициенты называются *биномиальными*.

4. Так называемый *общий член разложения* имеет вид

$$U_{k+1}=C_n^k a^k x^{n-k}. \qquad (2)$$

Давая в формуле (2) букве k различные значения от нуля до n, получим любой член разложения бинома, если подразумевать под C_n^0 единицу.

5. *Коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и конца разложения, равны между собой.*

Действительно, коэффициент первого члена от начала равен 1, коэффициент первого от конца — тоже 1; второй член от начала имеет коэффициент C_n^1, второй от конца — C_n^{n-1}, но по свойству сочетаний $C_n^1=C_n^{n-1}$ (§ 187).

Подобным образом можно установить равенство остальных биномиальных коэффициентов, равноудаленных от концов.

6. *Сумма биномиальных коэффициентов равна* 2^n. Положим в формуле бинома $x=a=1$, тогда имеем

$$(1+1)^n=1^n+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^{n-1}+1^n$$

или

$$2^n=1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+1.$$

7. Сравним два рядом стоящих члена разложения:

$$U_{k+1} \text{ и } U_{k+2}.$$

Имеем

$$U_{k+1}=C_n^k a^k x^{n-k}; \quad U_{k+2}=C_n^{k+1} a^{k+1} x^{n-k-1}.$$

Так как

$$C_n^{k+1}=\frac{C_n^k(n-k)}{k+1},$$

то

$$U_{k+2}=C_n^k\frac{n-k}{k+1}a^{k+1}x^{n-k-1}.$$

Чтобы получить биномиальный коэффициент члена разложения, надо биномиальный коэффициент предшествующего члена умножить на показатель степени у буквы x (убывает) *в этом члене и разделить на число предшествующих членов.* Воспользуемся этим свойством для быстрого разложения шестой степени двучлена:

$$(x+a)^6=x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+$$
$$+15a^4x^2+6a^5x+a^6.$$

Пояснение. Биномиальный коэффициент третьего члена равен $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ (третьему члену предшествуют два). Биномиальный коэффициент четвертого члена равен $\frac{15\cdot 4}{3}=20$. Очевидно, что достаточно довести коэффициенты до середины, а затем они идут в обратном порядке.

Пример 1. Найти восьмой член разложения $(x-a)^{12}$. Так как $x-a=[x+(-a)]$, то имеем

$$(x-a)^{12}=[x+(-a)]^{12}.$$

По формуле общего члена пишем:

$$U_8=U_{7+1}=C_{12}^7(-a)^7x^5;$$

$$U_{7+1}=-C_{12}^7a^7x^5=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8a^7x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\quad [C_{12}^7=C_{12}^5].$$

Пример 2. В разложении $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)^{11}$ найти член, который содержит после упрощения букву x в пятой степени.

Пишем общий член разложения:

$$U_{k+1}=C_{11}^k\left(\sqrt{x}\right)^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{11-k}=C_{11}^kx^{\frac{k}{2}}x^{\frac{11-k}{3}}=C_{11}^k\cdot x^{\frac{22+k}{6}}.$$

По условию задачи $\frac{22+k}{6}=5$, откуда $k=8$; следовательно, искомый член будет девятый, равный

$$C_{11}^8x^5=C_{11}^3x^5=\frac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3}x^5=165x^5.$$

Примечание. В приближенных вычислениях часто приходится извлекать корни из чисел, близких к 1, например: $\sqrt{1,008}$, $\sqrt[3]{1,06}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{0,997}}$ и т. д.

Во всех этих случаях корни представляют в виде степеней с дробными показателями и применяют формулу бинома, левая часть которой в данном случае принимает вид $(1+x)^{\alpha}$, где x — малое число, положительное или отрицательное, α — дробное число, положительное или отрицательное.

При этом обычно ограничиваются в правой части двумя членами разложения

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x$$

или тремя членами разложения

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2.$$

Пример 1. Вычислить с точностью до 0,001 квадратный корень из 0,996. Имеем

$$\sqrt{0,996}=\sqrt{1-0,004}=(1-0,004)^{\frac{1}{2}}.$$

В данном случае $x=-0,004$; $\alpha=\frac{1}{2}$, а потому по формуле бинома получим

$$(1-0,004)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(-0,004)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}(0,004)^2+\ldots$$

Ограничиваясь первыми двумя членами в правой части, имеем

$$\sqrt{0,996}\approx 1-0,002=0,998,$$

причем все значащие цифры корня точные.

Пример 2. Вычислить $\sqrt[3]{1,03}$ с точностью до 0,001. Имеем

$$\sqrt[3]{1,03}=\sqrt[3]{1+0,03}=(1+0,03)^{\frac{1}{3}};$$

здесь

$$x=0,03;\ \alpha=\frac{1}{3};$$

$$(1+0,03)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}(0,03)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot 2}\cdot(0,03)^2+\ldots$$

Ограничиваясь первыми двумя членами в правой части, имеем

$$(1+0{,}03)^{\frac{1}{3}} \approx 1+0{,}01 = 1{,}01.$$

§ 190. Метод математической индукции

При выводе формулы любого члена арифметической и геометрической прогрессий мы пользовались рассуждениями, которые носят название *метода математической индукции*. Сущность этого метода заключается в следующем: если надо установить справедливость некоторой формулы, в которой фигурирует натуральное число n, то:

1) проверяем, что предполагаемый закон имеет место для частного случая $n=1$;

2) предполагаем, что закон справедлив при каком-нибудь определенном значении $n=k$, и доказываем, что в таком случае он справедлив и при $n=k+1$; отсюда будет следовать, что закон вообще справедлив при любом значении n, ибо справедливость его была обнаружена, например, при $n=1$, а по доказанному он тогда верен и при $n=2$, а раз справедлив при $n=2$, то справедлив и при $n=3$, и т. д.

Иногда эти рассуждения называют способом доказательства от n к $n+1$. Рассмотрим пример.

Пример. Доказать, что при всяком натуральном n имеет место равенство

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Формула верна для $n=1$, ибо

$$1^2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6}=1; \quad 1=1.$$

Допустим, что формула верна при $n=k$:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Докажем, что в таком случае она верна и при $n=k+1$, т. е.

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

В самом деле,

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+$$
$$+(k+1)^2=(k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6}+(k+1)\right]=$$
$$=(k+1)\frac{2k^2+k+6k+6}{6}=(k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6}=$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

так как $2k^2+7k+6=(k+2)(2k+3)$.

Непосредственная проверка показала, что формула верна при $n=1$ и $n=2$; по доказанному она будет справедлива также при $n=3$, а потому и при $n=4$, следовательно, и при $n=5$ и вообще при любом натуральном n.

Упражнения

1. В какую сумму обратится срочный вклад в 540 руб., положенный в сберкассу на 15 лет по 3%?

2. Какую сумму надо внести в сберкассу в виде срочного вклада, чтобы по истечении 10 лет иметь на сберкнижке сумму 800 руб.?

3. По срочным вкладам государство платит 3% дохода, по обычным вкладам — 2%. Сколько теряет вкладчик, помещая свои сбережения не в виде срочного вклада, а в виде обычного вклада, на сумме 2500 руб. в течение 5 лет?

4. В течение скольких лет сумма вклада удвоится, если доход составляет: 1) 2%? 2) 3%?

5. При скольких процентах вклад в 375 руб. обратится через 20 лет в сумму 700 руб.?

6. Во сколько лет можно погасить трехпроцентную ссуду в 2000 руб. ежегодными уплатами по 200 руб.?

7. Определить размер ссуды, полученной кооперативом из расчета $4\frac{1}{2}$%, если срочная уплата в течение 15 лет составляет 450 руб.

8. Каков должен быть ежегодный срочный взнос, чтобы по истечении 20 лет при 3% (сложных) иметь на сберкнижке сумму 2000 руб.?

9. Население одного промышленного города увеличивается в среднем на 6% в год. Через сколько лет оно удвоится?

10. Ежегодный прирост древесины составляет 3,25%. Сколько кубометров даст участок леса по истечении 50 лет, если в настоящее время в нем около 25 тыс. кубометров древесины?

11. В городе в настоящее время числится 360 тыс. жителей, 30 лет тому назад их было около 200 тыс. Через сколько лет можно ожидать, что в том же городе будет 500 тыс. жителей,

исходя из среднего годового прироста населения за предыдущие годы?

12. Вычислить: 1) A_5^2; 2) A_7^5; 3) $\frac{A_6^2}{A_5^2}$; 4) $\frac{A_7^5+A_7^4}{A_7^3}$.

13. Решить уравнения: 1) $A_x^2=42$; 2) $A_x^2=56x$.

14. Вычислить: 1) P_3; 2) P_7; 3) $\frac{P_5-A_5^2}{5}$.

15. Вычислить: 1) C_5^4; 2) C_{18}^{17}; 3) C_{20}^{18}.

16. Сколько различных четырехзначных чисел можно написать девятью значащими цифрами, из которых ни одна цифра не повторяется?

17. Сколько различных делегаций можно выбрать из группы в 12 человек, если в делегацию входят три человека?

18. Среди перестановок из шести элементов сколько будет таких, которые начинаются с одного определенного элемента?

19. Написать разложение бинома: 1) $(a+b)^6$; 2) $(\sqrt{x}+a)^4$; 3) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8$; 4) $(\sqrt{x}-a)^5$; 5) $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^6$.

20. Найти:

1) третий член разложения $(x+3)^5$;

2) седьмой член разложения $(2x-3)^{10}$;

3) восьмой член разложения $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{12}$.

21. Найти тот член разложения $(\sqrt{x}+a)^9$, который содержит букву x в кубе (т. е. x^3).

22. Найти восьмой член разложения $\left(\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^n$, если коэффициент третьего члена равен 66.

Доказать методом математической индукции, что:

23. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

24. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

25. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.