# ГЛАВА XVI
# КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

## § 191. Комплексные числа

Не всякое квадратное уравнение имеет корни среди действительных чисел; например, уравнение $x^2+1=0$, или $x^2=-1$, не имеет корней, так как нет такого действительного числа, квадрат которого был бы равен $-1$.

Задача решения квадратного уравнения вида $x^2+b^2=0$ $(b\neq 0)$ послужила одним из поводов для введения новых, так называемых *мнимых чисел*.

Введем новое число $i$ — *мнимую единицу*, — обладающее тем свойством, что квадрат его равен $-1$:

$$i^2=-1.$$

Мы принимаем без доказательства, что можно ввести новые числа, так называемые *комплексные числа*, такие, что, присоединив их к известным нам уже действительным числам, получим множество чисел, над которыми можно по обычным правилам выполнять арифметические действия, и, кроме того, среди новых чисел будет существовать число $i$, обладающее свойством

$$i^2=-1.$$

Определение. *Числа вида $a+bi$, где $a$ и $b$ — два действительных числа, называются комплексными.* Число $a$ называется *действительной частью*, $bi$ — *мнимой частью* комплексного числа. Например:

$$3+2i\ (a=3;\ b=2);\ \frac{1}{2}-i\sqrt{2}\ \left(a=\frac{1}{2};\ b=-\sqrt{2}\right),$$

Два комплексных числа $a+bi$ и $a_1+b_1i$ считаются равными в том и только в том случае, если равны в отдельности их действительные и мнимые части, т. е. если

$$a+bi=a_1+b_1i, \text{ то } a=a_1, \ b=b_1.$$

Если $a=0$, $b\neq 0$, то комплексное число $a+bi$ обращается в чисто мнимое число $bi$; $b$ называется коэффициентом при мнимой единице.

Если $b=0$, то комплексное число $a+bi$ становится действительным числом, равным $a$.

Множество комплексных чисел содержит в себе как часть (подмножество) все действительные числа, а также все чисто мнимые числа; другими словами, действительные числа, а также мнимые числа представляют частные случаи комплексных чисел.

Например:

$$5=5+0\cdot i \qquad (a=5; \quad b=0);$$
$$-3i=0+(-3)\,i \qquad (a=0; \quad b=-3).$$

Примечание. С помощью мнимой единицы $i$ может быть выражен квадратный корень из отрицательного числа. Например:

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4(-1)}=2i; \quad \sqrt{-5}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}=i\sqrt{5}.$$

Примечание 2. Введение комплексных чисел делает возможным решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом, например уравнение $x^2-6x+13=0$ имеет два комплексных корня: $x_{1,2}=3\pm 2i$.

## § 192. Геометрическое представление комплексных чисел

Принято комплексное число $z=a+bi$ изображать точкой $M$ на плоскости; абсцисса этой точки равна действительной части $a$, ордината равна $b$, т. е. коэффициенту при мнимой единице (рис. 113). Всякому комплексному числу соответствует определенная точка на плоскости, и наоборот, всякой точке на плоскости соответствует определенное комплексное число.

Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками координатной плоскости $xOy$ и множеством комплексных чисел. Точкам, лежащим на оси $Ox$, соответствуют действительные числа ($b=0$); точкам, лежащим на оси ординат, — мнимые числа. Так, например, комплексное число $3+4i$ изобразится точкой $A$ (рис. 114), комплексное число $-3+2i$ изобразится точкой $B$, число $3i$ изобразится точкой $C$, число $-2i$ изобразится точкой $D$.

Определение. Два комплексных числа $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$ называются ***сопряженными***; они отличаются только знаком перед мнимой частью.

Пара сопряженных комплексных чисел изображается точками $M$ и $M_1$, симметричными относительно оси абсцисс. На рис. 114 точки $M$ и $M_1$ изображают сопряженные комплексные числа $2+3i$ и $2-3i$.

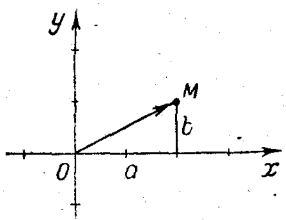

Рис. 113.

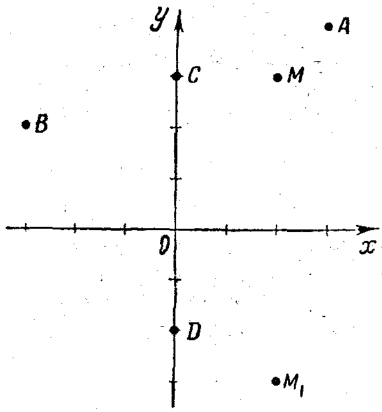

Рис. 114.

Можно дать еще другое геометрическое истолкование комплексного числа $a+bi$.

Соединим начало координат $O$ с точкой $M$ $(a;\ b)$.

Тогда вектор $\overrightarrow{OM}$ можно принять за геометрический образ комплексного числа $z=a+bi$, причем действительная часть $a$ есть проекция вектора $\overrightarrow{OM}$ на ось $Ox$, коэффициент $b$ при мнимой единице есть проекция вектора на ось $Oy$:

$$a=\text{пр}_x\overrightarrow{OM};\quad b=\text{пр}_y\overrightarrow{OM}.$$

Оба способа геометрического представления комплексных чисел равноценны, так как всякой точке $M$ плоскости $xOy$ соответствует определенный вектор $\overrightarrow{OM}$ и, наоборот, всякому вектору $\overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, соответствует определенная точка $M$ — конец вектора.

Определение. *Модулем комплексного числа* $z=a+bi$ называется действительное число $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

В геометрическом истолковании модуль — это длина радиуса-вектора $OM$. Число $r$ положительно и обращается в нуль лишь в том случае, когда $a=0$, $b=0$.

Для обозначения модуля комплексного числа это число берется в вертикальных черточках, например:

$$|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5;$$

$$|-2-i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}.$$

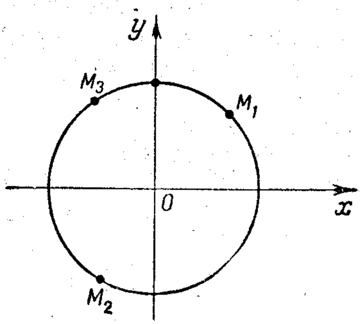

Рис. 115.

В частном случае при $b=0$ имеем

$$|a+0\cdot i|=\sqrt{a^2+0^2}=|a|,$$

т. е. модуль действительного числа есть абсолютная величина этого числа. Поэтому модуль комплексного числа называют еще и абсолютной величиной этого числа.

Все комплексные числа, имеющие модуль, равный единице, изображаются точками единичного круга с центром в начале координат; например, числа

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i; \\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i; \\ -0{,}6+0{,}8i \end{array}\right\}$$ изображаются точками $M_1$, $M_2$ и $M_3$ (рис. 115).

## § 193. Сложение комплексных чисел

Определение. *Суммой двух комплексных чисел* $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ называется комплексное число $z=a+bi$, действительная и мнимая части которого равны соответственно сумме действительных и мнимых частей слагаемых чисел $z_1$ и $z_2$, т. е. $z=z_1+z_2=(a_1+a_2)+$ $+(b_1+b_2)i$.

Примеры.

1) $(2+3i)+(3-i)=(2+3)+(3-1)i=5+2i$;

2) $4-5i+(2+5i)=6$;

3) $(2m+ni)+(m-2ni)=3m-ni$.

Из приведенных примеров видно, что сложение комплексных чисел производится по обычным правилам сложения многочленов.

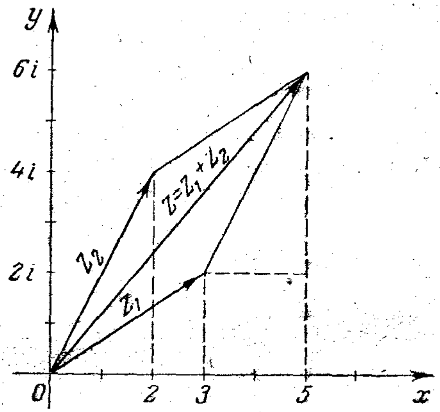


Рис. 116.

Из геометрического истолкования комплексных чисел как векторов следует, что сложение комплексных чисел приводится к сложению векторов по правилу, данному в § 73.

На рис. 116 изображено сложение комплексных чисел $z_1 = 3 + 2i$ и $z_2 = 2 + 4i$.

## § 194. Вычитание комплексных чисел

Определение. Под *вычитанием* из комплексного числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ другого комплексного числа $z_2 = a_2 + b_2 i$ подразумевается отыскание такого числа $z = a + bi$, которое, будучи сложено с вычитаемым $z_2$, дает уменьшаемое $z_1$.

Таким образом,

$$z_1 - z_2 = z,$$

если $z + z_2 = z_1$, или

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = a + bi$$

при условии, что

$$a + bi + a_2 + b_2 i = a_1 + b_1 i.$$

Производя сложение, получим

$$(a + a_2) + (b + b_2) i = a_1 + b_1 i.$$

Применяя условия равенства двух комплексных чисел, получим

$$a + a_2 = a_1, \quad \text{откуда} \quad a = a_1 - a_2,$$
$$b + b_2 = b_1, \quad \text{»} \quad b = b_1 - b_2.$$

*При вычитании двух комплексных чисел отдельно вычитаются их действительные и мнимые части.*

Пример.

$$3 - 2i - (1 + 3i) =$$
$$= (3 - 1) + (-2 - 3)\,i =$$
$$= 2 - 5i.$$

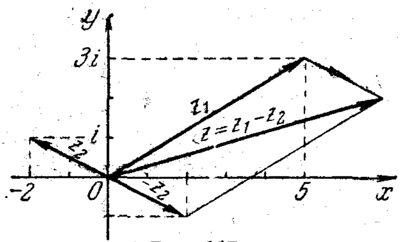

Рис. 117.

В геометрическом истолковании вычитание комплексных чисел означает вычитание соответствующих им векторов. На рис. 117 изображено вычитание из $z_1 = 5 + 3i$ числа $z_2 = -2 + i$.

## § 195. Умножение комплексных чисел

Два комплексных числа $a + bi$ и $a_1 + b_1 i$ перемножаются по обычному правилу умножения многочленов; в полученном результате $i^2$ заменяется на $-1$ и отделяется действительная часть от мнимой:

$$(a + bi)(a_1 + b_1 i) = aa_1 + a_1 bi + ab_1 i + bb_1 i^2 =$$
$$= \underbrace{aa_1 - bb_1}_{\text{действительная часть}} + \underbrace{(a_1 b + ab_1)\,i}_{\text{мнимая часть}}.$$

Замечаем, что *произведение двух комплексных чисел есть также число комплексное.*

Это правило умножения распространяется и на большее число комплексных множителей.

Примеры. 1) $(2 - 3i)(3 + 5i) = 6 - 9i + 10i - 15i^2 =$ $= 6 + i - 15 \cdot (-1) = 21 + i$;

2) $(4 + i) \cdot 2i = 8i + 2i^2 = -2 + 8i$.

Произведение комплексных чисел может оказаться действительным числом. В частности, это будет при умножении двух сопряженных комплексных чисел:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+abi-abi-b^2i^2=a^2+b^2=r^2,$$

где $r$ — модуль каждого из сомножителей.

Итак, *произведение двух сопряженных комплексных чисел есть число действительное, равное квадрату их общего модуля.*

Приведем еще пример, показывающий, что в результате действий над комплексными числами могут получиться интересные соотношения в области действительных чисел.

Имеется два произведения:

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(bc+ad)\,i$$

и

$$(a-bi)(c-di)=ac-bd-(bc+ad)\,i.$$

Перемножив эти равенства почленно, получим

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2.$$

Последнее равенство содержит исключительно действительные числа и выражает следующее соотношение из теории чисел: при умножении двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, получается произведение, представляющее собой также сумму двух квадратов.

Примеры. 1) $(1+4)(9+25)=5\cdot34=170=1^2+13^2$;

2) $(25+4)(1+9)=29\cdot10=290=1^2+17^2$.

## § 196. Деление комплексных чисел

*Частным от деления двух комплексных чисел* $a+bi$ и $a_1+b_1i$ называется такое комплексное число $x+yi$, которое, будучи умножено на делитель, дает в произведении делимое (по определению действия деления).

Таким образом, если одновременно коэффициенты $a_1$ и $b_1$ не равны нулю, то, полагая $\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=x+yi$, имеем

$$a+bi=(a_1+b_1i)(x+yi),$$

или

$$a+bi=a_1x-b_1y+(b_1x+a_1y)\,i.$$

Из условия равенства двух комплексных чисел следует:

$$\begin{cases} a_1x-b_1y=a; \\ b_1x+a_1y=b. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$x=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2},\quad y=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}i.$$

Проще этот результат можно получить умножением делимого и делителя на сопряженное делителю число:

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1i}=\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)}=\frac{aa_1+bb_1+(a_1b-ab_1)i}{a_1^2+b_1^2}=$$

$$=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}i.$$

Этим правилом деления и будем руководствоваться в дальнейшем.

Примеры.

1) $\frac{2+3i}{2+i}=\frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4-3i^2+6i-2i}{2^2+1}=\frac{7}{5}+\frac{4}{5}i;$

2) $\frac{3-4i}{4+3i}=\frac{(3-4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{12-12-16i-9i}{16+9}=\frac{-25i}{25}=-i.$

## § 197. Степени мнимой единицы

Пользуясь равенством $i^2=-1$, легко определить любую целую положительную степень мнимой единицы. Имеем:

$$i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i;\quad i^4=i^2\cdot i^2=1;\quad i^5=i^4\cdot i=i;$$

$$i^6=i^4\cdot i^2=-1;\qquad i^7=-i;\qquad i^8=1 \text{ и т. д.}$$

Это показывает, что значения степени $i^n$, где $n$ — целое положительное число, периодически повторяются при увеличении показателя на 4. Поэтому, чтобы возвести число $i$ в целую положительную степень, надо показатель степени разделить на 4 и возвести $i$ в степень, показатель которой равен остатку от деления.

Примеры.

$$i^{25}=i^{4\cdot 6+1}=i^{24}\cdot i^1=1\cdot i=i;$$

$$i^{38}=i^{36+2}=i^2=-1;\quad i^{51}=i^{48}\cdot i^3=-i.$$

Вообще $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=i^2=-1$, $i^{4n+3}=i^3=-i$, $i^{4n}=1$.

## § 198. Возведение в степень комплексного числа

Возведение комплексного числа в целую положительную степень производится по правилу возведения двучлена в соответствующую степень, так как оно представляет собой частный случай умножения одинаковых комплексных множителей.

Примеры. $(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+2abi$; $(a+bi)^3=a^3+3a^2bi+3ab^2i^2+b^3i^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$.

## § 199. Извлечение квадратного корня из комплексного числа

Пусть требуется извлечь квадратный корень из числа $a+bi$. Это значит, требуется найти такое комплексное число $x+yi$, квадрат которого равен $a+bi$. Имеем

$$\sqrt{a+bi}=x+yi,$$

где $x$ и $y$ — действительные числа. Тогда

$$a+bi=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi.$$

Применяя условие равенства двух комплексных чисел, получим

$$x^2-y^2=a,$$
$$2xy=b.$$

Решаем эту систему относительно неизвестных $x$ и $y$. Из второго уравнения находим, что $y=\frac{b}{2x}$. Тогда

$$x^2-\frac{b^2}{4x^2}=a,$$

откуда

$$4x^4-b^2-4ax^2=0,$$

или

$$4x^4-4ax^2-b^2=0;$$

следовательно,

$$x^2=\frac{2a\pm\sqrt{4a^2+4b^2}}{4}; \qquad x^2=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Так как $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant a$, то перед радикалом надо взять знак $+$, чтобы $x^2$ было положительным числом или нулем; следовательно,

$$x^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}. \qquad (1)$$

Подставляем это значение $x^2$ в уравнение $x^2 - y^2 = a$, получим

$$y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}. \tag{2}$$

Значения $x$ и $y$ находим из равенств (1) и (2):

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \tag{3}$$

и

$$y = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}. \tag{4}$$

Уравнение $2xy = b$ показывает, что произведение $xy$ имеет тот же знак, какой имеет число $b$. Следовательно, если $b > 0$, то $x$ и $y$ имеют одинаковые знаки, если $b < 0$, то $x$ и $y$ имеют разные знаки. Поэтому для $b > 0$ имеем

$$\sqrt{a + bi} = \pm \left( \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right);$$

для $b < 0$ имеем

$$\sqrt{a + bi} = \pm \left( \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right).$$

На практике этими формулами не пользуются, а проводят приведенный ход вычислений $x$ и $y$ в каждом отдельном случае.

Пример 1. $\sqrt{1 + 2i} = x + yi$;

$$1 + 2i = x^2 - y^2 + 2xyi;$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ xy = 1; \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{x}; \quad x^2 - \frac{1}{x^2} = 1; \quad x^4 - x^2 - 1 = 0; \quad x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2};$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}; \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - y^2 = 1;$$

$$y^2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \quad y = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Окончательно:

$$\sqrt{1 + 2i} = \pm \left( \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} + i \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \right).$$

Пример 2. $\sqrt{i}=x+yi;$

$$i=x^2-y^2+2xyi;$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ 2xy=1; \end{cases}$$

$$y=\frac{1}{2x};\quad x^2-\frac{1}{4x^2}=0;\quad 4x^4-1=0;\quad x^4=\frac{1}{4};\quad x^2=\frac{1}{2};$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \sqrt{i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

Проверка.

$$\left[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right]^2=\frac{1}{2}(1+2i+i^2)=\frac{1}{2}(1+2i-1)=i.$$

В § 206 будет показан более удобный способ извлечения корня из комплексного числа.

## § 200. Тригонометрическая форма комплексного числа

Как уже было сказано в § 193, комплексное число $a+bi$, не равное нулю, изображается радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}$, причем длина этого вектора есть модуль комплексного числа (рис. 118):

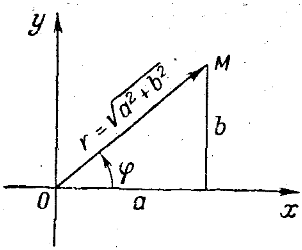

Рис. 118.

$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Угол $\varphi$ между положительным направлением оси $Ox$ и вектором $\overrightarrow{OM}$ называется *аргументом комплексного числа* $a+bi$. Этот угол принято отсчитывать от оси $Ox$ к вектору $\overrightarrow{OM}$, что показано стрелкой на чертеже. Если комплексное число равно нулю, то вектор $\overrightarrow{OM}$ обращается в точку (нуль-вектор) и говорить о его направлении нет смысла. Поэтому считают, что число нуль не имеет аргумента.

Очевидно, что каждое комплексное число, не равное нулю, имеет бесконечное множество значений аргумента; эти значения отличаются друг от друга на целое число полных оборотов, т. е. на величину $2\pi k$, где $k$ — любое целое число; например, аргументом комплексного числа $2+2i$ являются углы вида $\frac{\pi}{4}+2\pi k$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots)$.

Значение аргумента, взятое в пределах первой окружности, т. е. от 0 до $2\pi$, называется *главным*.

Так, например, для комплексного числа $2+2i$ главное значение аргумента равно $\frac{\pi}{4}$, для числа $-2+2i$ главное значение аргумента равно $\frac{3}{4}\pi$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Число | 3 | имеет | главное | значение | аргумента | 0 |
| » | $-3$ | » | » | » | » | $\pi$ |
| » | $i$ | » | » | » | » | $\frac{\pi}{2}$ |
| » | $-i$ | » | » | » | » | $\frac{3}{2}\pi$ |

и т. д.

По рис. 118 имеем

$$a=r\cos\varphi, \quad b=r\sin\varphi,$$

откуда

$$a+bi=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Выражение $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой* комплексного числа, в отличие от формы $a+bi$, называемой *алгебраической*.

Для определения аргумента $\varphi$ пользуемся формулами

$$\cos\varphi=\frac{a}{r} \quad \text{и} \quad \sin\varphi=\frac{b}{r} \qquad \left(r=\sqrt{a^2+b^2}\right).$$

В зависимости от знака действительной и мнимой частей выбирается соответствующая четверть, в которой должен оканчиваться угол $\varphi$.

Пример 1. Представить в тригонометрической форме число $-1+i\sqrt{3}$.

$$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2; \quad \cos\varphi=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\left(\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \cos\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}\right).$$

Так как $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\varphi$ следует взять равным $\frac{2\pi}{3}$. Следовательно,

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Пример 2. Представить в тригонометрической форме число $-1-i$. Имеем

$$r=\sqrt{2};$$

$$\cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi=\frac{5\pi}{4}$.

Итак, $-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

Пример 3. Представить в тригонометрической форме число 1. Имеем $r=1$, $\varphi=0$; следовательно, $1=1(\cos 0+i\sin 0)$, или $1=\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k$.

## § 201. Умножение комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Перемножим два комплексных числа:

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$

и

$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Получим

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2+ir_1r_2\sin\varphi_1\cos\varphi_2+$$
$$+ir_1r_2\cos\varphi_1\sin\varphi_2-r_1r_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2.$$

Короче:

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Результат показывает, что *модуль произведения равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей.*

## § 202. Геометрическое истолкование умножения комплексных чисел

На рис. 119 комплексному числу $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ соответствует вектор $\overrightarrow{OM_1}$, числу $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ соответствует вектор $\overrightarrow{OM_2}$.

Произведению $z_1z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$ соответствует вектор $\overrightarrow{OM}$.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ получается из вектора $\overrightarrow{OM_1}$ поворотом на угол $\varphi_2$ и изменением его длины ($r_1$) в $r_2$ раз. Если $r_2 > 1$, то говорят, что вектор $\overrightarrow{OM_1}$ подвергается *растяжению*, при $r_2 < 1$ — *сжатию*.

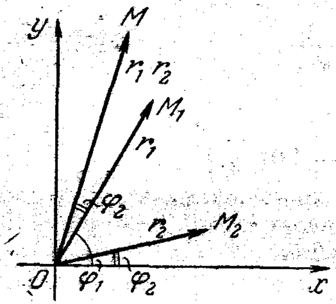


Рис. 119.

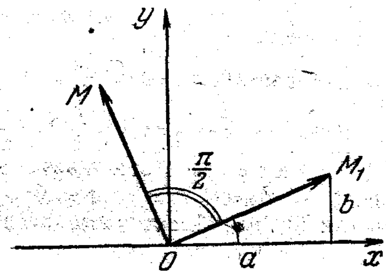


Рис. 120.

В частном случае, когда комплексное число $z_1$ умножается на $i$, то вектор $\overrightarrow{OM_1}$ поворачивается на прямой угол $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, сохраняя при этом длину $r_1$ без изменения (рис. 120).

Пример.

$$2(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,5(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) = 10(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi).$$

Полученное правило остается в силе для любого числа сомножителей.

## § 203. Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Найдем модуль и аргумент частного

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}.$$

Умножим числитель и знаменатель правой части на $(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)$; получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Следовательно, *модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.*

Пользуясь этим правилом, можно показать, что

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1} = \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{\cos\varphi + i\sin\varphi} =$$
$$= \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi).$$

Короче:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

## § 204. Возведение в степень комплексного числа, заданного в тригонометрической форме

Так как $n$-я степень, где $n$ — целое положительное число, представляет произведение $n$ равных сомножителей, то по правилу умножения комплексных чисел получим

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

или

$$r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

После сокращения имеем

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \qquad (1)$$

Эта формула носит название *формулы Муавра*. В частности, она дает возможность получить косинус и синус дуг, кратных данной.

Положим $n = 2$, тогда $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$, или

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi,$$

откуда

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \quad \text{и} \quad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

При $n = 3$ получим

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi,$$

или

$$\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi) =$$
$$= \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi,$$

откуда

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi.$$

или

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi;$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi \sin\varphi - \sin^3\varphi,$$

или

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

Если обе части последнего равенства предыдущего параграфа возвести в степень $n$, получим

$$\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1}\right]^n = [\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]^n,$$

или

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi).$$

Последнее равенство показывает, что формула (1) справедлива и для целых отрицательных показателей.

## § 205. Извлечение корня из комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Пусть требуется извлечь корень $n$-й степени из комплексного числа $Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Это значит, что надо найти такое комплексное число $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, которое, будучи возведено в $n$-ю степень, даст число $Z$, т. е.

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

или

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

На основании условия равенства двух комплексных чисел заключаем, что модули их должны быть равны, а аргументы могут отличаться на число, кратное $2\pi$, т. е. $r = \rho^n$; $n\theta = \varphi + 2\pi k$, где $k$ — целое число. Отсюда получим

$$\rho = \sqrt[n]{r}; \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

Таким образом, результат извлечения корня представится так:

$$z = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (1)$$

где $\sqrt[n]{r}$ — арифметическое значение корня.

Если в формуле (1) числу $k$ будем давать значения: 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$, то получим следующие $n$ значений корня:

$$\text{при } k=0 \quad z_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right);$$

$$\text{при } k=1 \quad z_1=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\right];$$

$$\text{при } k=2 \quad z_2=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}\right)\right];$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\text{при } k=n-1 \quad z_{n-1}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right].$$

Аргументы этих значений корня, т. е. углы

$$\frac{\varphi}{n};\quad \frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n};\quad \frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n};\ \ldots;\ \frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

идут в возрастающем порядке; нетрудно убедиться в том, что каждый из них меньше полного угла, или $2\pi$. Для этого достаточно показать, что наибольший из них

$$\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}<2\pi.$$

В самом деле, главное значение аргумента комплексного числа меньше полного угла: $0\leqslant\varphi<2\pi$; а потому

$$\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}<\frac{2\pi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}=2\pi;$$

$$\frac{\varphi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}<2\pi.$$

Из тригонометрии известно, что в пределах одной окружности два различных угла не могут иметь одновременно одинаковые значения синуса и одинаковые значения косинуса; *следовательно, все $n$ значений корня будут различны.*

При дальнейшем увеличении числа $k$ ($k=n$, $n+1$, $n+2$, ...) новых значений корня уже не получим; например при $k=n$ имеем

$$z_n=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi n}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi n}{n}\right)=$$

$$=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right]=$$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)=z_0.$$

Получилось то же значение, что и при $k=0$. Если положить $k=n+1$, то получим $z_1$, при $k=n+2$ получим $z_2$ и т. д.

Пример 1. $\sqrt{i}$. Представляем $i$ в тригонометрической форме:

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\quad (r \text{ равно } 1);$$

$$\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right).$$

При $k=0$ имеем

$$\sqrt{i}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

При $k=1$ получим

$$\sqrt{i}=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Этот пример был решен другим способом в § 200.

Пример 2. $z=\sqrt[4]{-1}$. Имеем

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi.$$

Тогда

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4};$$

при $k=0$ получаем

$$z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

при $k=1$ получаем

$$z_2=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i);$$

при $k=2$ получаем

$$z_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

при $k=3$ получаем

$$z_4=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Пример 3. Найти все четыре значения $x=\sqrt[4]{1}$.

$$\sqrt[4]{1}=\sqrt{1(\cos 0+i\sin 0)}=$$

$$=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{4}+i\sin\frac{0+2\pi k}{4}\right)=$$

$$=\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}=x_k.$$

Полагаем $k=0;\ 1;\ 2;\ 3$. Получим:

$$x_1=\cos 0+i\sin 0=1;$$

$$x_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i;$$

$$x_3=\cos\pi+i\sin\pi=-1;$$

$$x_4=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$$

Дадим геометрическое истолкование полученных результатов. Построим точки, соответствующие найденным четырем значениям.

Это будут точки $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, представляющие собой вершины вписанного в данный круг квадрата (рис. 121).

Подобным образом, извлекая корень кубичный из 1, найдем три комплексных числа:

$$\cos 0+i\sin 0,\quad \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\quad \text{и}\quad \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

Если построим соответствующие им точки, то эти точки окажутся на окружности единичного радиуса и явятся вершинами правильного вписанного треугольника (рис. 122).

Геометрически извлечение корня $n$-й степени из 1 сводится к построению правильного $n$-угольника, вписанного в круг единичного радиуса, причем, если $n$ — нечетное число,

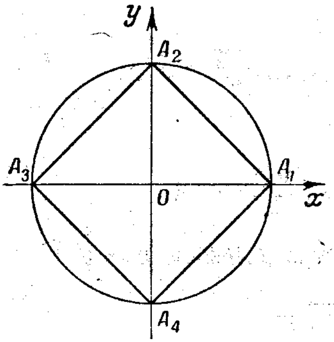


Рис. 121.

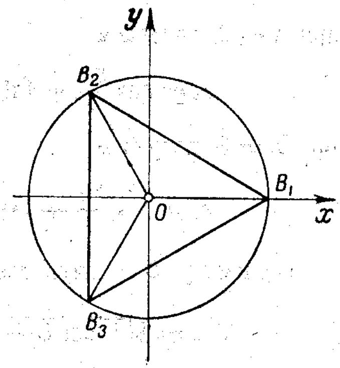


Рис. 122.

одна из вершин окажется на оси абсцисс вправо от 0; если же $n$ — четное, то имеются две вершины, расположенные на оси абсцисс.

## Упражнения

1. Записать короче следующие выражения: а) $i+i+i+i$; б) $5i-9i+12i$; в) $ai+bi$; г) $10i-10i$; д) $ai+bi-ai$; е) $ai-ai$.

Вычислить:

2. а) $(3+5i)+(2+i)$; б) $(7-5i)+(7+5i)$;
в) $(2+5i)+(-2+3i)$.
3. а) $(1+4i)+(-1-4i)$; б) $(-6+3i)+(6+3i)$;
в) $(5+3i)+(12+i)$.
4. а) $(-7+2i)+(7+2i)$; б) $(m+ni)+(x+yi)$; в) $i+(a+bi)$.
5. а) $(3+5i)-(2+i)$; б) $(7-5i)-(7+5i)$;
в) $(2+5i)-(-2+3i)$.
6. а) $1+4i-(-1-4i)$; б) $-6+3i-(6+3i)$;
в) $(5+3i)-(5-3i)$.
7. а) $(0{,}25-i)-(0{,}75+i)$; б) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}i\right)$;
в) $(a+bi)-i$.
8. а) $5(2-3i)$; б) $-3(1+i)$; в) $i(4+5i)$.
9. а) $-2(3-i)$; б) $i(1-i)$; в) $-0{,}5i(1+2i)$.
10. а) $(3+2i)(4-i)$; б) $(1-i)(2+i)$;
в) $(0{,}2-0{,}3i)(0{,}5+0{,}6i)$.

11. а) $(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})$; б) $(a+mi)(2a-mi)$;
в) $(x-i\sqrt{y})(-x-2i\sqrt{y})$.

12. а) $(3+5i)(4-i)$; б) $(6+11i)(7+3i)$;
в) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i\right)$.

13. а) $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i\sqrt{2})$; б) $(p-2qi)(2p+qi)$;
в) $(a-i\sqrt{b})(a+2i\sqrt{b})$.

14. а) $(a+i\sqrt{b})(a-i\sqrt{b})$; б) $(3+2i\sqrt{2})(3-2i\sqrt{2})$;
в) $(\sqrt{a}+i\sqrt{b})(\sqrt{a}-i\sqrt{b})$.

Разложить на пары комплексных множителей:

15. а) $x^2+y^2$; б) $a^2+9b^2$; в) $4m^2+9n^2$.

16. а) $a^2+\frac{b^2}{4}$; б) $p^2+1$; в) $16+9$.

17. а) $25+1$; б) 5; в) 65.

Вычислить частные:

18. а) $\frac{10i}{2}$; б) $\frac{15i}{5i}$; в) $8i:(-16i)$.

19. а) $\frac{21-i}{i}$; б) $\frac{1+i}{i}$; в) $-\frac{12}{5i}$.

20. а) $\frac{5}{1+2i}$; б) $\frac{1+i}{1-i}$; в) $-\frac{17-6i}{3-4i}$.

21. а) $\frac{63+16i}{4+3i}$; б) $\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$; в) $\frac{5i}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$.

22. а) $\frac{1-20i\sqrt{5}}{7-2i\sqrt{5}}$; б) $\frac{1+i\sqrt{8}}{1-i\sqrt{3}}$; в) $\frac{m+ni}{m-ni}$.

23. а) $\frac{1-i^2}{(1+i)^3}$; б) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$;
в) $\frac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}}-\frac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$.

24. а) $\frac{32}{1+3i\sqrt{7}}$; б) $\frac{21}{4+3i\sqrt{6}}$; в) $\frac{5}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$.

25. а) $\frac{3}{\sqrt{2}-i}$; б) $\frac{7}{\sqrt{5}+i\sqrt{2}}$; в) $\frac{10i}{3+i}$.

Возвести в степень:

26. а) $i^{24}$; б) $i^{37}$; в) $i^{49}$; г) $(-i)^{10}$; д) $(-i)^9$; е) $-i^{10}$.

27. а) $i^{21}$; б) $i^{11}$; в) $i^{25}$; г) $i^{44}$; д) $i^{58}$; е) $i^{136}$.

28. а) $(2-i\sqrt{2})^2$; б) $(x+yi)^2+(x-yi)^2$; в) $(1+i)^3$.

29. а) $(-0{,}5-0{,}5i\sqrt{3})^2$; б) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)^3$;
в) $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4$.

**30.** а) $(4+3i)^2$; б) $(2-i\sqrt{3})^2$; в) $(1-i)^5$.

Извлечь корень:

**31.** а) $\sqrt{ai}$; б) $\sqrt{5+12i}$. **32.** а) $\sqrt{21+20i}$; б) $\sqrt{-13+84i}$.

**33.** а) $\sqrt{15+8i}$; б) $\sqrt{-77+36i}$.

**34.** а) $\sqrt{3{,}75+2i}$; б) $\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}$.

**35.** Построить точки, изображающие числа: а) $3+5i$; б) $4-i$; в) $-3+2i$; г) $-2-2i$; д) $5$; е) $-4i$; ж) $5i$; з) $0{,}2-0{,}5i$; и) $-5i-5$.

**36.** Как расположатся на плоскости изображения двух сопряженных комплексных чисел?

Найти модуль и аргумент чисел:

**37.** а) $1+i$; б) $1-i$; в) $-1+i$; г) $-1-i$.

**38.** а) $\sqrt{3}+i$; б) $5+2i$; в) $-2i$; г) $3-3i$.

Представить в тригонометрической форме числа:

**39.** а) $i$; б) $-i$; в) $-3$; г) $\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

**40.** а) $3+2i$; б) $3+4i$. **41.** а) $3-4i$; б) $8+5i$.

**42.** а) $2+3i$; б) $-12+5i$. **43.** а) $-2-7i$; б) $4-3i$.

Построить слагаемые и сумму комплексных чисел:

**44.** а) $3+4i$ и $5+3i$; б) $1-5i$ и $2+3i$; в) $-4+2i$ и $4+2i$.

**45.** а) $5+3i$ и $3+5i$; б) $1-3i$ и $1+3i$; в) $-5+2i$ и $5+2i$.

Построить уменьшаемое, вычитаемое и разность комплексных чисел:

**46.** а) $3+4i$ и $2+i$; б) $7-2i$ и $5-3i$; в) $4+5i$ и $5+4i$.

**47.** а) $3+6i$ и $6+3i$; б) $6+3i$ и $3+6i$; в) $1-i$ и $3i$.

Вычислить произведения:

**48.** $2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)\cdot 3(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$.

**49.** $2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)\cdot 3(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$.

**50.** $2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)\cdot(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$.

**51.** $(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)\cdot(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)$.

**52.** $(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)(\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ)$.

Доказать, что:

**53.** $(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)^2=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$.

**54.** $(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)^3=i$, т. е. $\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ$.

**55.** $(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)^{\frac{1}{2}}=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$.

Вычислить:

**56.** а) $(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)^3$; б) $(\cos 25^\circ+i\sin 25^\circ)^5$.

**57.** а) $(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)^6$; б) $(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)^4$.

**58.** $\sqrt{i}$. **59.** $\sqrt{-i}$. **60.** $\sqrt{1+i}$. **61.** $\sqrt{1-i}$. **62.** $\sqrt[3]{i}$.

**63.** $\sqrt[5]{1}$. **64.** $\sqrt[6]{1}$. **65.** $\sqrt[4]{-1}$.