ГЛАВА III

НЕРАВЕНСТВА

§ 16. Основные понятия и определения

Определение 1. Два числа или два алгебраических выражения, соединенные между собой знаком $<$ («меньше»), или знаком $>$ («больше»), или знаком $\neq$ (не равно), образуют *неравенство*.

Примеры. 1) $3 > -5$; 2) $a < 1 + a^2$; 3) $3 \neq 2$.

Определение 2. Два неравенства вида $a < b$, $c < d$ или $a > b$, $c > d$ называются неравенствами *одинакового смысла*; например, $3 > 2$ и $7 > -20$.

Два неравенства вида $a > b$ и $c < d$ называются неравенствами *противоположного смысла*; например, $4 < 5$ и $0 > -3$. Иногда к знакам $>$ или $<$ присоединяется и знак равенства, например, $a \geqslant 0$ (читается «число a неотрицательно») или $b \leqslant 0$ («число b неположительно»). Такие неравенства называются *нестрогими*, в отличие от *строгих* неравенств $a > b$ или $c < d$.

§ 17. Свойства неравенств

1) *Если $a > b$, то $b < a$.*

2) *Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.*

3) *Два неравенства вида*: (1) $a < b$ *и* $b < c$ *или* (2) $a > b$ *и* $c < b$ *могут быть объединены в двойное неравенство*:

$$(1)\ a < b < c \quad и \quad (2)\ a > b > c.$$

Пример. Если a — приближенное значение величины x, Δa — граница абсолютной погрешности приближенного числа a, то истинное значение величины $x < a + \Delta a$, но $x > a - \Delta a$, и можно написать двойное неравенство: $a - \Delta a < x < a + \Delta a$.

4) *Если $a > b$ и m — любое число, то*

$$a + m > b + m.$$

К обеим частям неравенства можно прибавить (или отнять) одно и то же число, в результате получается неравенство того же смысла.

Пример. $5 > 3$; прибавим к обеим частям по 4, получим $9 > 7$.

5) *Если $a > b$ и m — положительное число, то*

$$am > bm.$$

Обе части неравенства можно умножить на одно и то же положительное число, от чего смысл неравенства не изменится.

При умножении обеих частей неравенств на отрицательное число m $(m < 0)$ смысл неравенства меняется на противоположный, т. е. *если $a > b$ и $m < 0$, то*

$$am < bm.$$

Пример. $3 > -1$ умножаем на (-4); получим $-12 < 4$. То же самое можно сказать и о делении обеих частей неравенства на число m $(m \neq 0)$, поскольку деление сводится к умножению на $\frac{1}{m}$.

§ 18. Действия над неравенствами

1. Сложение. *Два или несколько неравенств одинакового смысла можно складывать; в результате получается неравенство того же смысла:*

$$\begin{array}{c} a > b, \\ c > d, \\ m > n. \\ \hline a + c + m > b + d + n. \end{array}$$

2. Вычитание. *Неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать; в результате получаем неравенство того же смысла, что и неравенство-уменьшаемое.*

Если $a > b$ и $c < d$ и из первого неравенства вычитаем второе, то

$$a - c > b - d.$$

Пример.

$$\begin{array}{r} -3 > -7 \\ 4 < 5 \\ \hline -3-4 > -7-5, \end{array}$$

или $-7 > -12$.

3. Умножение. *Два или несколько неравенств одинакового смысла можно перемножить между собой, если все их части положительны; в результате получим неравенство того же смысла.*

Если,

$$\begin{array}{l} a < b \\ c < d \quad (a > 0,\ c > 0) \\ \hline \text{то } ac < bd. \end{array}$$

Пример.

$$\begin{array}{r} 3 < 5 \\ 4 < 6 \\ \hline 12 < 30. \end{array}$$

4. Деление. *Два неравенства противоположного смысла можно делить одно на другое, если все части неравенств — положительные числа; в результате получим неравенство того же смысла, что и неравенство-делимое,* т. е. то неравенство, которое делим на другое:

$$\begin{array}{l} a > b \\ c < d \quad (b > 0,\ c > 0) \\ \hline \frac{a}{c} > \frac{b}{d}. \end{array}$$

Пример.

$$\begin{array}{r} 4 > 3 \\ 1 < 2 \\ \hline \frac{4}{1} > \frac{3}{2}. \end{array}$$

§ 19. Решение неравенств первой степени с одним неизвестным

Определение 1. Неравенство вида

$$ax + b > a_1x + b_1 \quad \text{или} \quad ax + b < a_1x + b_1$$

называется *неравенством первой степени с одним неизвестным*. Таковыми будут, например, неравенства

1) $\frac{3x}{2} - 5 > \frac{2x}{5} + 2$,

2) $4 - 5x < x + 22$.

Решением неравенства называется всякое значение x, которое удовлетворяет данному неравенству.

Например, число 2 является решением неравенства $4 - 5x < x + 22$, так как $4 - 5 \cdot 2 < 2 + 22$, $-6 < 24$.

Определение 2. *Решить неравенство* — это значит найти все значения неизвестного, удовлетворяющие данному неравенству. Отыскание решения всякого неравенства первой степени с одним неизвестным приводит к простейшим неравенствам вида

1) $x > a$,

2) $x < b$.

В первом случае говорят, что число a есть *нижняя граница* значений неизвестного. Это значит, что любое

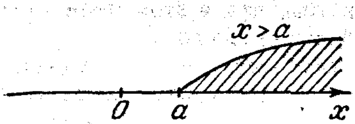

Рис. 3.

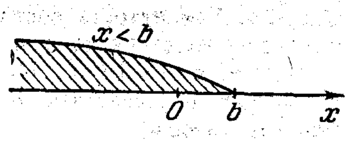

Рис. 4.

число, бо́льшее числа a, является решением данного неравенства. Если на числовой оси построим точку, соответствующую числу a, то значения неизвестного x, удовлетворяющие неравенству $x > a$, изображаются точками, лежащими правее точки $x = a$ (на рис. 3 заштриховано).

В простейшем неравенстве $x < b$ число b называется *верхней границей* неизвестного, что означает: любое число, меньшее числа b, является решением этого неравенства. Графически неравенство $x < b$ иллюстрируется следующим образом: на числовой оси отмечается точка, соответствующая числу b; тогда любая точка, расположенная левее точки b, изображает число, удовлетворяющее данному неравенству (рис. 4).

Неравенства первой степени с одним неизвестным решаются по той же схеме, как и уравнения первой степени. Поясним на примерах.

Пример.

$$\frac{2x-5}{3}-1>3-x.$$

Умножаем обе части неравенства на $3>0$, чтобы освободиться от дробей:

$$2x-5-3>9-3x.$$

Перенесем член с неизвестным из правой части в левую, а свободный член из левой в правую, изменяя у переносимых членов знаки на противоположные:

$$2x+3x>9+8; \quad 5x>17.$$

Разделив обе части на $5>0$, получим $x>3{,}4$. Число 3,4 — нижняя граница значений неизвестного x.

§ 20. Отрезок. Промежуток

Пусть a и b — два числа, причем $a<b$. К числам a и b приобщим все промежуточные числа, заключенные между ними. Тогда образуется замкнутое множество чисел x: $a \leqslant x \leqslant b$. Замкнутость состоит в том, что в этом множестве есть наименьшее число a и наибольшее число b.

Определение 1. Множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называется *отрезком* (или *сегментом*).

Принято отрезок обозначать $[a, b]$; например пишут $[0, 2]$ вместо $0 \leqslant x \leqslant 2$. Само название — отрезок — указывает на то, что этому числовому множеству соответствует множество точек числовой оси, сплошь заполняющих отрезок с концами в точках $x=a$ и $x=b$.

Удалим крайние (концевые) точки отрезка $[a, b]$, тогда получим открытое множество чисел x: $a<x<b$; в этом множестве нет наименьшего числа и нет наибольшего числа, в силу чего оно и называется *открытым*.

Определение 2. Множество всех чисел x, удовлетворяющих двойному неравенству $a<x<b$, называется *промежутком* (или *интервалом*).

Обозначается промежуток символом (a, b), например $(1, 5)$ означает $1<x<5$.

Если имеет место $a \leqslant x < b$, то говорят, что x принадлежит полуинтервалу $[a, b)$; если же имеет место $a < x \leqslant b$, то говорят, что x принадлежит полуинтервалу $(a, b]$.

§ 21. Решение систем неравенств первой степени

Определение. Два неравенства вида

$$\begin{cases} ax+b>0, \\ a_1x+b_1<0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} ax+b>0, \\ a_1x+b_1>0, \end{cases}$$

относительно которых ставится вопрос об отыскании их общих решений, образуют *систему неравенств первой степени с одним неизвестным*.

Общий прием решения системы двух неравенств заключается в следующем: находим решения каждого неравенства в отдельности и из сопоставления их устанавливаем, какие решения являются общими для обоих неравенств; если общих решений нет, то система несовместна или противоречива. Выбор общих решений облегчается, если решения каждого неравенства изображать на числовой оси.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x-3>0, \\ 5x+4>0. \end{cases}$$

1) $2x-3>0,\ x>\frac{3}{2}$;

2) $5x+4>0,\ x>-\frac{4}{5}$.

Для первого неравенства число $\frac{3}{2}$ является нижней границей значений неизвестного. Строим эту точку и покрываем штриховкой сверху ту часть числовой оси, которая правее точки, соответствующей числу $\frac{3}{2}$ (рис. 5). Аналогично штрихуем снизу числовую ось, начиная от точки $-\frac{4}{5}$ вправо, так как число $-\frac{4}{5}$ является нижней границей значений неизвестного для второго неравенства. Там, где ось окажется заштрихованной как сверху, так и снизу, окажутся

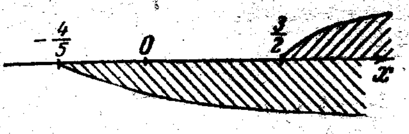

Рис. 5.

общие решения. В данном случае общими решениями будут любые числа, бо́льшие $\frac{3}{2}$:

$$x > \frac{3}{2}.$$

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{7-x}{2} - 3 < \frac{3+4x}{5} - 4, \\ \frac{5}{3}x + 5(4-x) > 2(4-x). \end{cases}$$

Приведем каждое неравенство к простейшему виду, для чего освободимся от дробей, раскроем скобки, перенесем все члены в левую часть и приведем подобные члены; получим

$$\begin{cases} -13x + 39 < 0, \\ -4x + 36 > 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -x + 3 < 0, \\ -x + 9 > 0. \end{cases}$$

Решая первое из них, находим $x > 3$; из второго находим, что $x < 9$.

Оба неравенства удовлетворяются одновременно значениями x, взятыми из промежутка $3 < x < 9$ (рис. 6).

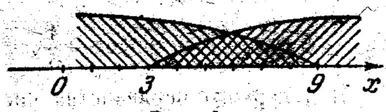

Рис. 6.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{x+2}{3-x} > 2$.

Имеем $\frac{x+2}{3-x} - 2 > 0$, приводим к общему знаменателю:

$$\frac{x+2-2(3-x)}{3-x} > 0,$$

$$\frac{3x-4}{3-x} > 0.$$

Дробь положительна, если числитель и знаменатель одинаковы по знаку, поэтому либо

$$\begin{cases} 3x - 4 > 0, \\ 3 - x > 0, \end{cases} \qquad (1)$$

либо

$$\begin{cases} 3x-4<0, \\ 3-x<0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решая систему (1), находим, что первому неравенству удовлетворяют значения $x>\frac{4}{3}$, второму — значения $x<3$. Оба неравенства удовлетворяются одновременно, если $\frac{4}{3}<x<3$.

Система (2) несовместна, т. е. решений не имеет, так как из первого неравенства этой системы следует, что $x<\frac{4}{3}$, а из второго $x>3$. Всякое число, которое больше 3, не может в то же время оказаться меньше $\frac{4}{3}$.

§ 22. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля

Абсолютную величину действительного числа x, т. е. $|x|$, можно геометрически истолковать как расстояние от точки, изображающей число x, до начала 0 числовой оси. Например, если $|x|=3$, то на числовой оси имеются только две точки: $x_1=-3$ и $x_2=+3$, которые удалены от начала 0 на расстояние, равное трем единицам масштаба.

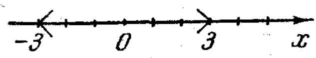

Рис. 7.

Простейшее неравенство $|x|<3$ означает, что ищутся такие значения неизвестного x, которым соответствуют точки, отстоящие от начала 0 меньше чем на три единицы длины (по выбранному масштабу). Ясно, что все такие точки принадлежат промежутку $(-3, 3)$ (рис. 7). Любое число из этого промежутка есть решение неравенства $|x|<3$. Все решения записываются в виде двойного неравенства

$$-3<x<3.$$

Неравенство $|x|\leqslant 3$ отличается от предыдущего неравенства $|x|<3$ только тем, что добавляется два новых решения $x=\pm 3$; все решения образуют отрезок $[-3, 3]$ или $-3\leqslant x\leqslant 3$.

Пример 1. Решить неравенство

$$|x-3|<1.$$

Геометрический способ решения. От точки $x=3$ отложим единицу масштаба влево, потом вправо; получим две точки: 2 и 4. Любая промежуточная между ними точка удовлетворяет данному неравенству (рис. 8), т. е.

$$2<x<4.$$

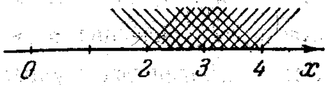

Рис. 8.

Алгебраический способ решения. Опускаем знак абсолютной величины и пишем двойное неравенство

$$-1<x-3<1;$$

прибавляем ко всем трем частям неравенства число 3:

$$-1+3<x-3+3<1+3,$$

или

$$2<x<4.$$

Пример 2. $|2x+3|<5$. Данное неравенство равносильно двойному неравенству $-5<2x+3<5$. Прибавим ко всем частям неравенств число (-3), получим $-8<$ $<2x<2$, разделим все части на 2: $-4<x<1$.

Решим этот пример иначе. Имеем

$$2\left|x+\frac{3}{2}\right|<5;$$

делим обе части на 2:

$$\left|x+\frac{3}{2}\right|<\frac{5}{2},$$

или

$$\left|x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right|<\frac{5}{2};$$

от точки $\left(-\frac{3}{2}\right)$ числовой оси откладываем $\frac{5}{2}$ единицы масштаба влево и вправо; получим точки -4 и 1. Теперь ясно, что

$$-4<x<1.$$

Пример 3. $|2x-3|>7$.

При отыскании решения данного неравенства надо рассмотреть два случая:

а) $2x-3>0$, тогда $|2x-3|=2x-3$, $2x-3>7$, $x>5$;

б) $2x - 3 < 0$, тогда $|2x - 3| = -(2x - 3)$ (абсолютная величина отрицательного числа равна этому числу с противоположным знаком; стр. 14); решаем неравенство

$$-(2x-3) > 7; \quad 2x - 3 < -7, \quad x < -2.$$

Таким образом, любое число, которое больше 5, а также всякое число, меньшее числа (—2), являются решениями неравенства $|2x - 3| > 7$ (рис. 9).

Решим этот пример иначе. Представим его левую часть в форме

$$2\left|x - \frac{3}{2}\right| > 7, \text{ или } \left|x - \frac{3}{2}\right| > \frac{7}{2}.$$

От точки числовой оси, соответствующей числу $\frac{3}{2}$, отложим влево и вправо $\frac{7}{2}$ единиц, получим точки (—2) и 5. Этим построением выделяется отрезок [—2; 5]; все числа, не принадлежащие этому отрезку, являются решениями данного неравенства; это будут числа, меньшие (—2) и бо́льшие 5:

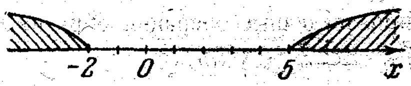

Рис. 9.

$$x < -2 \text{ или } x > 5.$$

§ 23. Понятие о доказательстве неравенств

Неравенство, справедливое при всех значениях букв, входящих в него (быть может, с некоторыми ограничениями), называется *тождественным* неравенством. Относительно такого неравенства ставится вопрос не о решении его, а о доказательстве.

В чем заключается доказательство и как оно проводится, поясним на примерах.

Пример 1. Доказать, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического, т. е. что

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Предположим, что данное неравенство справедливо; тогда после возведения обеих частей в квадрат получим неравенство того же смысла (бо́льшему положительному числу соответствует больший квадрат)

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab, \quad \text{или} \quad a^2+2ab+b^2 \geqslant 4ab;$$

$$a^2-2ab+b^2 \geqslant 0, \quad (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Последнее неравенство есть очевидное неравенство, так как квадрат любого действительного числа неотрицателен ($\geqslant 0$). Но это пока были поиски доказательства, а не само доказательство, так как когда мы данное неравенство начинали преобразовывать: возводить в квадрат обе части, прибавлять к обеим частям по одному и тому же члену, и т. д., ставя между частями неравенства все время знак $\geqslant$ (читается «не меньше»), — то мы, в сущности говоря, уже признали, что левая часть неравенства не меньше правой, а тогда и доказывать нечего.

Если мы докажем, что произведенные операции обратимы, то этим будет доказано, что $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Имеем:

$$(a-b)^2 \geqslant 0, \quad \text{или} \quad a^2+b^2 \geqslant 2ab.$$

Прибавим к обеим частям по $2ab$:

$$(a+b)^2 \geqslant 4ab; \quad \frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab.$$

Извлекаем из обеих частей квадратный корень и берем только арифметические значения корней, тогда $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Очевидно, знак равенства будет иметь место только при $a=b$.

Пример 2. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc.$$

Доказательство. Будем исходить из очевидных неравенств:

$$\left.\begin{array}{lll} (a-b)^2 \geqslant 0, & & a^2+b^2 \geqslant 2ab, \\ (a-c)^2 \geqslant 0, & \text{или} & a^2+c^2 \geqslant 2ac, \\ (b-c)^2 \geqslant 0 & & b^2+c^2 \geqslant 2bc. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Складывая неравенства (1), получим

$$2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+ac+bc);$$

после деления на 2 имеем

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc.$$

Пример 3. Доказать, что если $x+y+z=1$, где $x>0$, $y>0$, $z>0$, то

$$(1-x)(1-y)(1-z) \geqslant 8xyz.$$

Доказательство. За основу берем известные неравенства (пример 1)

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}, \quad \frac{x+z}{2} \geqslant \sqrt{xz}, \quad \frac{y+z}{2} \geqslant \sqrt{yz},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} x+y &\geqslant 2\sqrt{xy}, \\ x+z &\geqslant 2\sqrt{xz}, \\ y+z &\geqslant 2\sqrt{yz}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Из условия задачи имеем $x+y=1-z$, $x+z=1-y$, $y+z=1-x$. Теперь неравенства (1) примут вид

$$1-z \geqslant 2\sqrt{xy},$$
$$1-y \geqslant 2\sqrt{xz},$$
$$1-x \geqslant 2\sqrt{yz}.$$

После перемножения этих трех неравенств получим

$$(1-x)(1-y)(1-z) \geqslant 8xyz.$$

§ 24. Графическое решение неравенств

Пример 1. Решить графически неравенство

$$2x-5>0.$$

Левая часть неравенства, т. е. $2x-5$, есть линейная функция аргумента x; обозначим ее через y:

$$y=2x-5,$$

и построим ее график (рис. 10). Неравенство $2x-5>0$ означает, что ищутся такие значения аргумента x, при которых линейная функция положительна, т. е. ординаты прямой положительны, или точки графика лежат выше оси абсцисс. Этому требованию удовлетворяют все точки, абсциссы которых больше $\frac{5}{2}$; другими словами, эти точки лежат правее точки пересечения графика с осью Ox.

Пример 2. Решить графически систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3 > 0, \\ 2x - 1 < 0. \end{cases}$$

Построим графики двух линейных функций (рис. 11):

(I) $y = \frac{1}{2}x + 3$

и

(II) $y = 2x - 1$.

Теперь нам надо указать все такие значения аргумента x, при которых одновременно ординаты первой прямой

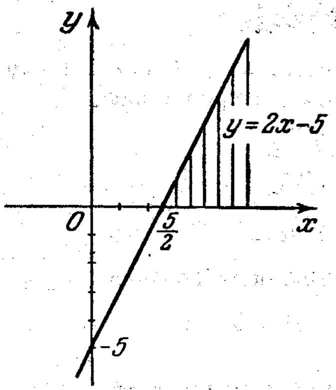

Рис. 10.

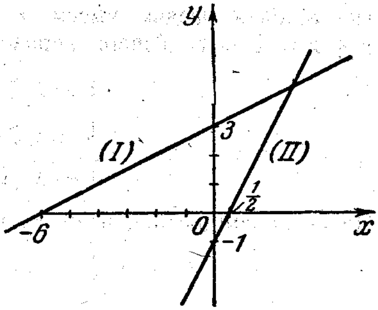

Рис. 11.

положительны, а второй прямой — отрицательны. Этому требованию удовлетворяют значения x, заключенные между -6 и $\frac{1}{2}$:

$$-6 < x < \frac{1}{2}.$$

Упражнения

1. Решить неравенства:

1) $\frac{2x+1}{5} - \frac{2-x}{3} > 1$;

2) $\frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} > \frac{5x+1}{3}$;

3) $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} < 1 - \frac{x}{7}$;

4) $m(x-1) > x+2$;

5) $\frac{x}{k}+\frac{1-3x}{2}<\frac{x+2}{4k}$ $(k<0)$;

6) $\frac{mx}{m-2}-\frac{x-1}{3}<\frac{2x+3}{4}$ $(m\neq 2)$;

7) $|3x-5|<3$;

8) $|4-3x|<0{,}1$;

9) $|3-2x|>5$;

10) $|5x+3|>8$.

2. Решить системы неравенств:

1) $\begin{cases} 2x-3>0, \\ 3x+2>0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x-3>x+5, \\ x+10<3x-2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0{,}4x+\frac{7}{3}<\frac{2}{3}x-1{,}2, \\ 5x+17>9x-63; \end{cases}$

4) $\frac{2x+1}{3-x}>1.$

3. При каких значениях a имеют место неравенства

$$1<\frac{3a+10}{a+7}<2?$$