ГЛАВА VIII

ВЕКТОРЫ

§ 71. Направленные отрезки на оси

Пусть дана ось OP, т. е. прямая, на которой выбрано положительное направление, начало отсчета O и единица масштаба (рис. 39). Возьмем ряд точек на этой оси, например точки A, B, C, D, N.

Отрезки AB, CD, BC, AN и т. д., лежащие на оси OP, будем различать не только по их длине, но и по направлению: первая буква A в обозначении отрезка AB всегда при-

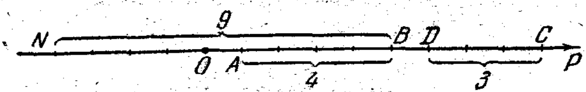

Рис. 39.

нимается за начало отрезка, вторая буква B обозначает конец отрезка. Отрезку AB приписывается то направление, в каком мы перемещаемся по оси OP, пробегая отрезок AB от его начала A к концу B; если это направление совпадает с положительным направлением оси OP, как на рис. 39, то отрезок считается положительным, в противном случае — отрицательным.

Направленные отрезки на оси принято обозначать полужирным шрифтом или так: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BN}$, **a**.

Из сказанного следует, что $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{NB}$ — положительные отрезки; $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AN}$ — отрицательные отрезки.

Два отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ называются *противоположными*.

Длина направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ и называется также ***модулем*** направленного отрезка. Модуль направленного отрезка положителен (вообще говоря, неотрицателен). По рис. 39 имеем

$$|\overrightarrow{AB}| = 4; \quad |\overrightarrow{CD}| = 3; \quad |\overrightarrow{BN}| = 9.$$

Очевидно, что $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$.

Определение. ***Величиной*** направленного отрезка называется его длина (модуль), взятая со знаком «+», если отрезок положительный, и со знаком «—», если отрезок отрицательный.

Величина направленного отрезка обозначается теми же буквами, что и отрезок, но только светлыми, либо без стрелки.

Таким образом, 1) AB обозначает величину направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, равную 4;

2) BA обозначает величину направленного отрезка $\overrightarrow{BA}$, равную (—4).

Примечание. Надо строго различать два разных понятия: 1) длина направленного отрезка, или его модуль, — это всегда положительное число; 2) величина направленного отрезка представляет либо положительное, либо отрицательное число, смотря по тому, будет ли направленный отрезок положительным или отрицательным. Два противоположных отрезка, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$, имеют одну и ту же длину, но их величины — противоположные числа.

Под суммой направленных отрезков понимают сумму их величин. Так, сумма противоположных отрезков равна нулю (нулевому отрезку): $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$.

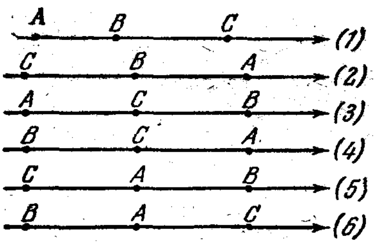

Рис. 40.

Теорема. *При любом расположении на оси трех точек A, B и C, между величинами трех направленных отрезков* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AB}$ существует зависимость:

$$AB + BC = AC. \qquad (1)$$

Доказательство. Всего возможно шесть различных случаев взаимного расположения трех точек A, B и C на оси (рис. 40).

Для случаев (1) и (2) теорема очевидна, так как все три отрезка, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$, имеют одинаковое направление, а потому $AB+BC=AC$.

Рассмотрим случай (3):

$$AB+BC=(AC+CB)+BC=AC+\underbrace{CB+BC}_{0}=AC.$$

Случай (5):

$$AB+BC=AB+(BA+AC)=\underbrace{AB+BA}_{0}+AC=AC.$$

Предоставляем учащемуся проверить справедливость равенства (1) для случаев (4) и (6), изображенных на рис. 40.

Следствие.

$$AB+BC+CA=0.$$

Доказательство.

$$AB+BC=AC; \quad AC+CA=0.$$

§ 72. Понятие вектора

В математике, физике, механике, а также в ряде других наук встречаются двоякого рода величины: одни из них, например, такие, как длина, площадь, объем, масса, температура, теплоемкость и т. д.— вполне определяются числами, выражающими эти величины в соответствующих единицах измерения. Такие величины принято называть ***скалярными величинами*** или просто ***скалярами***.

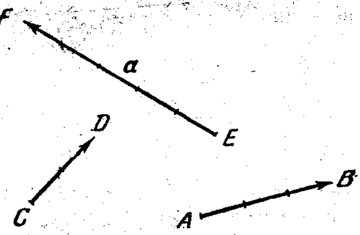

Рис. 41.

Другие величины, например, такие, как скорость, ускорение, сила, напряженность электромагнитного поля, помимо их численных значений имеют еще определенное направление. Такие величины называются ***векторными величинами***. Всякую векторную величину изображают в виде ***вектора***, т. е. направленного отрезка, снабженного стрелкой на конце. На рис. 41 изображены три вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ (обозначение то же, что и у направленных отрезков).

Модулем вектора называется его длина, измеренная принятой единицей масштаба. По рис. 41 имеем

$$|\overrightarrow{AB}| = AB = 3; \quad |\overrightarrow{CD}| = CD = 2; \quad |\overrightarrow{EF}| = |\boldsymbol{a}| = a = 5.$$

Обычно модуль вектора обозначают теми же буквами, что и вектор, но светлым шрифтом и без стрелки. Итак, модуль вектора есть скаляр (число всегда положительное).

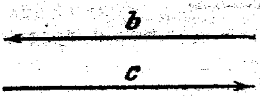

Рис. 42.

Два вектора считаются *равными*, если они имеют одинаковые модули и одинаковое направление.

Следствие. Вектор можно переносить параллельно самому себе, от этого он не изменится.

Два вектора с равными модулями, но направленные в противоположные стороны, называются *противоположными*. По рис. 42 векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ противоположны.

Принято вектор, противоположный вектору $\boldsymbol{a}$, обозначать $(-\boldsymbol{a})$.

§ 73. Действия над векторами

Над векторами можно по установленным правилам производить арифметические действия, как и над числами, т. е. скалярными величинами.

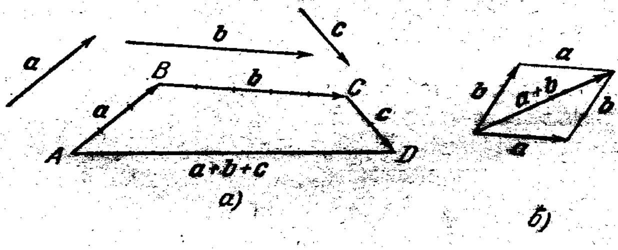

Рис. 43.

1. Сложение векторов. Пусть даны три вектора: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Тогда их суммой называется вектор, построенный по следующему правилу (рис. 43, *а*).

При произвольной точке A строим вектор $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$: для этого перемещаем вектор $\boldsymbol{a}$ параллельно себе так, чтобы его начало совпало с точкой A; аналогично при точке B строим вектор $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$; при точке C строим вектор $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$; получается векторная ломаная $\overrightarrow{ABCD}$. Вектор $\overrightarrow{AD}$, идущий от начала первого вектора к концу последнего, называется *суммой* данных трех векторов (по определению). Сумму двух векторов иногда строят так: приводят векторы к общему началу и строят на них, как на двух смежных сторонах, параллелограмм, тогда вектор, идущий по диагонали из общего начала, есть их сумма (рис. 43, *б*).

3. Вычитание векторов. Определение. *Разностью* между вектором $\boldsymbol{a}$ и вектором $\boldsymbol{b}$ называется такой третий

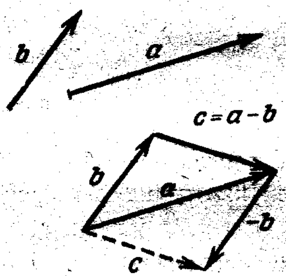

Рис. 44.

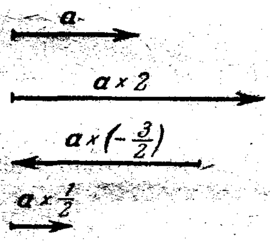

Рис. 45.

вектор $\boldsymbol{c}$, который, будучи сложен с вектором $\boldsymbol{b}$, дает в сумме вектор $\boldsymbol{a}$. Такой вектор можно построить следующим образом: приведем векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ к общему началу (рис. 44). Вектор, идущий от конца вектора $\boldsymbol{b}$ к концу вектора $\boldsymbol{a}$, и есть разность между вектором $\boldsymbol{a}$ и вектором $\boldsymbol{b}$.

Примечание. Вычитание вектора $\boldsymbol{b}$ можно заменить прибавлением противоположного вектора $(-\boldsymbol{b})$. Результат будет один и тот же. Заметим, что если направим векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ по двум смежным сторонам параллелограмма, то вектор, идущий по одной из диагоналей, есть сумма, а по другой диагонали — разность данных векторов.

3. Умножение вектора на скаляр. Умножить вектор $\boldsymbol{a}$ на скаляр m — значит увеличить его длину (модуль) в m раз и сохранить направление вектора прежним, если $m>0$, или изменить направление на противоположное, если $m<0$. На рис. 45 изображены случаи: 1) $\boldsymbol{a}\cdot 2$; 2) $\boldsymbol{a}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$; 3) $\boldsymbol{a}\cdot\frac{1}{2}$.

Запись $\boldsymbol{a} \cdot 2$ и $2\boldsymbol{a}$ означает одно и то же. Если сумма векторов умножается на скаляр, то можно каждый слагаемый вектор умножить на этот скаляр и полученные результаты сложить. На рис. 46 показано умножение суммы векторов $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ на скаляр 2; это умножение выполнено двояко: а) вектор $AC=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ умножается на 2 (длина увеличивается

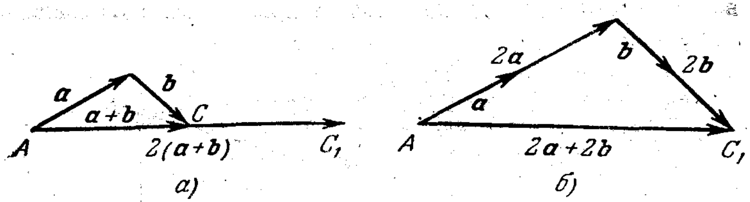

Рис. 46.

в два раза); получается вектор $\overrightarrow{AC_1}$, равный $2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ (рис. 46, *а*); б) вектор $\overrightarrow{AC_1}$ получен как сумма векторов $2\boldsymbol{a}$ и $2\boldsymbol{b}$ (рис. 46, *б*).

§ 74. Проекция вектора на ось

Как известно, *проекцией точки* M на ось называется основание перпендикуляра MM_1, опущенного из точки M на эту ось, т. е. точка M_1.

Пусть дана ось l и произвольный вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 47). Опустим перпендикуляры из начала и конца вектора на ось. Получим на оси направленный отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$; величина этого вектора A_1B_1 и называется *проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ на ось l, что записывается так:

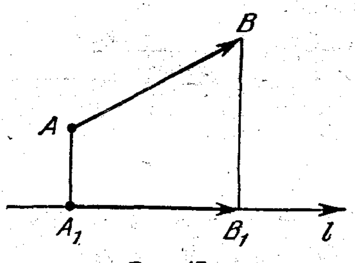

Рис. 47.

$$\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}=A_1B_1.$$

Определение. *Проекцией вектора* на ось называется число (скаляр), выражающее величину направленного отрезка на оси, ограниченного проекциями начала и конца данного вектора.

На рис. 48 показано, что

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = A_1B_1 = 3;$$

$$\text{пр}_l \overrightarrow{CD} = C_1D_1 = -4; \quad \text{пр}_l \overrightarrow{EF} = 0,$$

так как вектор $\overrightarrow{EF}$ перпендикулярен к оси l. Очевидно, если вектор параллелен оси проекции и имеет с осью одинаковое

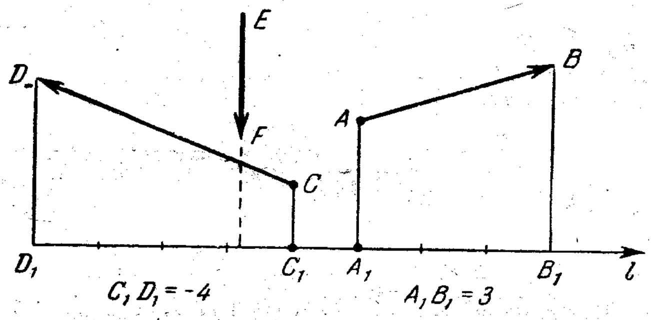

Рис. 48.

направление, то его проекция равна длине вектора; если же направление вектора противоположно направлению оси l, то

$$\text{пр}_l \boldsymbol{a} = -a.$$

Теорема 1. *Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций отдельных слагаемых векторов на ту же ось.*

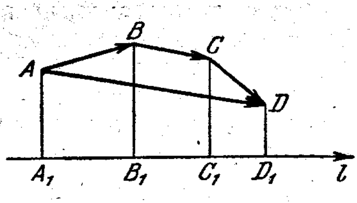

Рис. 49.

Доказательство. Пусть вектор $\overrightarrow{AD}$ есть сумма трех векторов: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ (рис. 49). Тогда

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AD} = A_1D_1. \qquad (1)$$

Спроектируем отдельные слагаемые векторы на ту же ось:

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = A_1B_1; \quad \text{пр}_l \overrightarrow{BC} = B_1C_1; \quad \text{пр}_l \overrightarrow{CD} = C_1D_1. \qquad (2)$$

Складывая эти равенства, получим

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} + \text{пр}_l \overrightarrow{BC} + \text{пр}_l \overrightarrow{CD} = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 = A_1D_1. \qquad (3)$$

Правые части равенств (1) и (3) равны между собой, следовательно, равны и левые части:

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AD} = \text{пр}_l \overrightarrow{AB} + \text{пр}_l \overrightarrow{BC} + \text{пр}_l \overrightarrow{CD}.$$

Примечание. Доказанную теорему часто формулируют еще так: проекция векторной ломаной на ось равна сумме проекций отдельных звеньев ломаной и равна проекции замыкающего вектора на ту же ось. $\overrightarrow{AD}$ — замыкающий вектор векторной ломаной $\overrightarrow{ABCD}$.

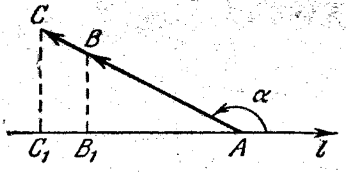

Рис. 50.

Теорема 2. *Для данного угла α, образованного вектором с осью l, отношение проекции вектора к его модулю есть определенное число, не зависящее от модуля вектора.*

На рис. 50 два вектора, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, образуют один и тот же угол α с осью l, причем

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = AB_1, \quad \text{пр}_l \overrightarrow{AC} = AC_1.$$

Из подобия прямоугольных треугольников ABB_1 и ACC_1 имеем

$$\frac{|AB_1|}{AB} = \frac{|AC_1|}{AC}; \tag{4}$$

проекции векторов взяты по абсолютной величине, потому что в геометрии стороны треугольников всегда выражаются положительными числами. Но проекции AB_1 и AC_1 обе одинаковы по знаку (по рис. 50 обе отрицательны), а потому знаки абсолютной величины в равенстве (4) можно опустить, и мы получим

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC},$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Если $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$;

$$\text{пр}_l \boldsymbol{a} = a_l, \quad \text{пр}_l \boldsymbol{b} = b_l,$$

то $\frac{a_l}{a} = \frac{b_l}{b}$, что дает более краткую запись доказанной теоремы.

§ 75. Скалярное произведение двух векторов

Задача. Под действием силы $\boldsymbol{F}$ тело перемещается по прямой из точки O в точку M, причем OM образует угол в $60°$ с направлением действия силы (рис. 51).

Вычислить произведенную силой работу, если модуль силы $|\boldsymbol{F}| = F = 12$ *кГ*, а пройденный телом путь $OM = 5$ *м*. Если направление силы совпадает с направлением перемещения, то работа A равна произведению модуля силы на пройденный путь. В данном случае это правило неприменимо, поскольку сила действует под углом.

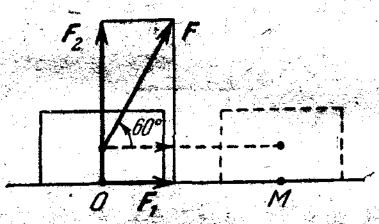

Рис. 51.

Разложим силу $\boldsymbol{F}$ на две составляющие: $\boldsymbol{F}_1$, направленную по прямой OM, и $\boldsymbol{F}_2$, перпендикулярную к $\boldsymbol{F}_1$. Работу производит только горизонтальная составляющая $\boldsymbol{F}_1$, ее модуль (см. прямоугольный треугольник на рис. 51) $F_1 = F\cos 60° = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ (*кг*), а потому произведенная работа $A = 6 \cdot 5 = 30$ (*кгм*).

В этой задаче мы имели два вектора: вектор-силу $\boldsymbol{F}$ и вектор-перемещение $\overrightarrow{OM}$. Требовалось поставить им в соответствие некоторую скалярную величину, в данном случае работу.

Определение. *Скалярным произведением* вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется произведение их модулей на косинус угла между ними:

$$\boldsymbol{ab} = ab\cos\varphi,$$

где φ — угол, образованный векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Таким образом, работа есть скалярное произведение вектора-силы на вектор-перемещение:

$$A = \boldsymbol{F} \cdot \overrightarrow{OM} = 12 \cdot 5\cos 60° = 12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 30 \text{ (кгм)}.$$

Упражнения

1. Начертите три произвольных вектора и постройте их сумму.

2. Постройте вектор, равный разности двух векторов $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, если $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=4$, угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 30°.

3. Изобразите произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ и рядом с ним постройте векторы: $\boldsymbol{a}\frac{3}{2}$; $\boldsymbol{a}\left(-\frac{2}{3}\right)$; $-2\boldsymbol{a}$.

4. Найти проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на ось, образующую с вектором угол 120°, если $|\boldsymbol{a}|=8$.

5. Вектор $\boldsymbol{a}$ образует с осью Ox угол 30°, а вектор $\boldsymbol{b}$ образует с той же осью угол 75°. Вычислить $\text{пр}_x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, если $|\boldsymbol{a}|=6$; $|\boldsymbol{b}|=8$.

6. Вычислить скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$, если угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 30°; $a=8$; $b=5$.