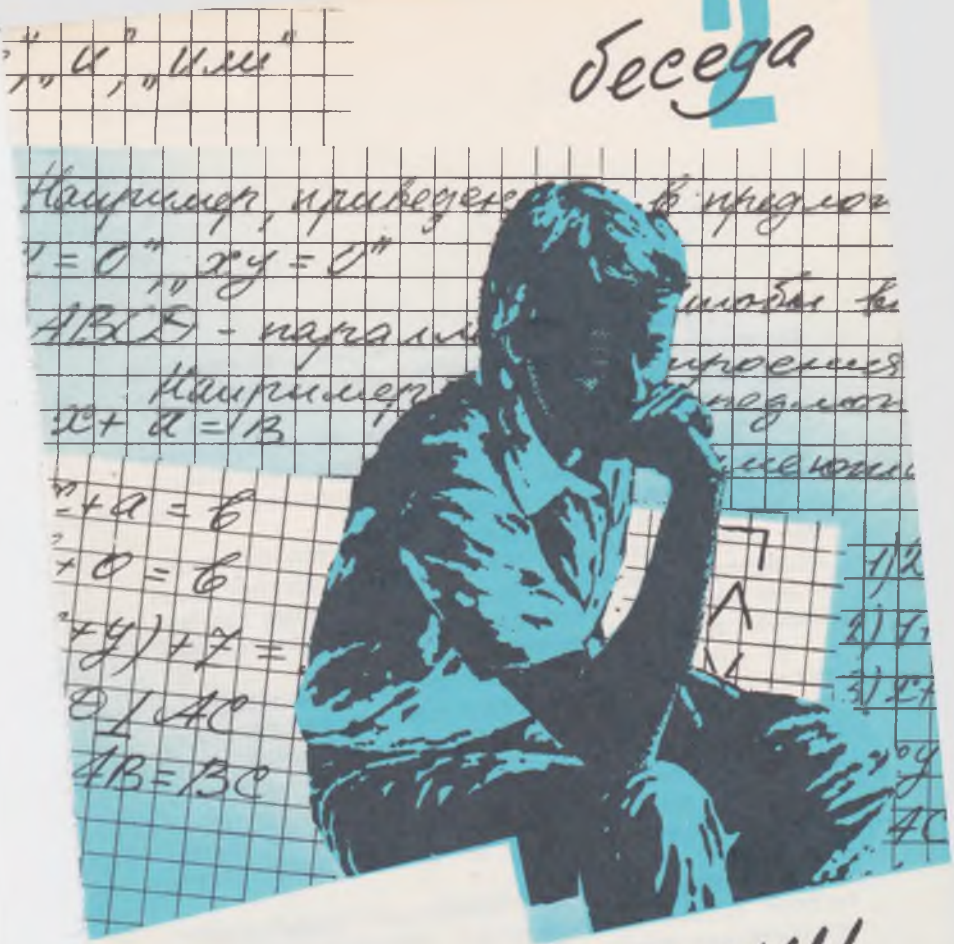
беседа 2



Как устроены математические предложения?

А. Прежде всего мы должны уметь совершенно точно отличать математические предложения от нематематических.

С. Они отличаются, во-первых, по содержанию. В математических предложениях речь идет о математических понятиях, в нематематических — о понятиях, не изучаемых математикой.

А. В таком случае можно сказать, что предложение «Прямая линия имеет вид туго натянутой нити» является математическим (геометрическим), так как в нем речь идет о геометрическом понятии, обозначаемом термином «прямая линия».

С. Это предложение не является математическим, так как в нем имеется такое выражение, как «туго натянутая нить», которое не является математическим термином, не обозначает никакого математического понятия.

А. Как же следует уточнить сказанное Вами, чтобы это предложение не попадало в класс математических?

С. По-видимому, математические предложения состоят только из выражений, обозначающих математические понятия.

А. Это уже лучше, но слишком узко, не охватывает всевозможные математические предложения.

Например, предложения «$x = 0$», «$xy = 0$», «$ABCD$ — параллелограмм» являются математическими с Вашей точки зрения, а такие предложения, как: **«Если** $x = 0$ **или** $y = 0$, **то** $xy = 0$**»**, или: **«Если** $ABCD$ — параллелограмм **и** $\angle BAC = 90°$, **то** $ABCD$ — прямоугольник», уже не являются таковыми, так как они содержат и выражения **«если... то»**, **«или»**, **«и»**, не обозначающие никаких математических понятий.

С. Я имел в виду, конечно, и такие выражения. Они ведь применяются в предложениях любого содержания, математического или нематематического.

А. Это верно. Слова **«не»**, **«и»**, **«или»**, **«если ... то»**, **«тогда и только тогда»**, **«существует»**, **«все»** и некоторые другие, называемые **логическими связками** (операторами), обозначают логические операции, с помощью которых из одних предложений образуются другие.

Как же окончательно уточнить Вашу точку зрения на математические предложения?

С. Это — предложения, состоящие из выражений, обозначающих математические понятия, и из логических связок.

А. Такое описание, на первых порах, вполне удовлетворительно. Но это, разумеется, не является определением, так как нуждаются в уточнении и то, что мы назвали «выражениями, обозначающими математические понятия» и «логические связки», и сам способ конструирования из них математических предложений.

Выше Вы говорили «во-первых». Чем же еще отличаются математические предложения?

С. Во-вторых, они часто записываются на специальном языке символов.

А. Именно часто, но не всегда, особенно в школьной математике. Знакомые Вам математические предложения записываются чаще всего на смешанном словесно-символическом языке, а иногда, особенно в геометрии, формулируются полностью на словесном языке. В наших беседах мы несколько расширим известный Вам символический язык, в частности, введением специальных обозначений для логических связок.

Будем считать, что теперь мы умеем отличать математические предложения от нематематических.

С. Первые не содержат других выражений, кроме обозначающих математические понятия или являющихся логическими связками.

А. Превосходно. Мы, таким образом, обнаружили, что предложения могут содержать, а могут и не содержать логические связки. Начнем с тех,

которые не содержат их. Из предложений, не содержащих логических связок, образуются все новые и новые предложения, подобно тому, как из атомов путем их различного соединения получают большое разнообразие молекул.

Назовите предложения без связок!

С. Например, приведенные Вами выше предложения: «$x = 0$», «$xy = 0$», «$ABCD$ — параллелограмм». И в предыдущей беседе мы встречались со многими такими предложениями:

$$x + a = b;\ b + 0 = b;\ (x + y) + z = x + (y + z);$$
$$BD \perp AC;\ AB = BC \text{ и др.}$$

А. Совершенно верно.

Займемся прежде всего изучением этих и подобных им предложений, которые мы будем называть в дальнейшем **элементарными.** Имеется достаточное основание для такого названия. Любое из этих предложений нельзя разделить, расчленить на части так, чтобы каждая из этих частей была также предложением.

Чтобы выявить строение элементарных предложений, рассмотрим ряд примеров: $2 + 3 = 5$ (1); $4 + 5 = 7$ (2); $x + 3 = 5$ (3); $xy = 0$ (4); $BD \perp AC$ (5); $AB = BC$ (6); $3 + x = 7$ (7); $3 < 7$ (8); $4 > 3 + 4$ (9); $a \parallel b$ (10); $\alpha \perp \beta$ (11); $a \cdot b = 0$ (12).

С. В Вашем перечне есть, однако, неверное равенство (2) и неверное неравенство (9).

А. Это так. Но о верных (истинных) и неверных (ложных) предложениях речь пойдет дальше.

Сначала давайте выясним, как устроены эти (и другие) элементарные предложения, отвлекаясь пока от их истинности или ложности, от их смысла и значения. Рассматривая записи, заметим, что в каждой из них имеется знак какого-то отношения: $=$ (равно), $\perp$ (перпендикулярно), $<$ (меньше), $>$ (больше), $\parallel$ (параллельно), которым связываются два выражения.

С. А что это за выражения? Что $2 + 3$, $x + 3$, $x \cdot y$ — выражения, мне известно, а вот 5, 0, a — разве это выражения?

А. Уточним понятие «выражение». Выражение

(числовое, алгебраическое) всегда представляет собой образование из знаков некоторого языка (алгебры, геометрии, анализа), построенное по четко сформулированным правилам, составляющим определение выражения, или **терма** (как это понятие называется в научной литературе).

Естественно, чтобы сформулировать определение терма, нужно наперед задать **алфавит,** т. е. совокупность знаков (**букв** алфавита), из которых строятся термы (выражения).

Например, если взять язык школьной алгебры, то какие знаки составляют алфавит этого языка?

С. По-видимому, во-первых, цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, служащие для записи чисел; во-вторых, латинские буквы a, b, c, ..., x, y, z — переменные и, в-третьих, знаки действий: $+$, $-$, $\cdot$, $:$.

А. Этот перечень, однако, неполный.

С. Мы еще пользуемся знаками: $=$, $<$, $>$.

А. Совершенно верно. Но Вы забыли еще скобки: левая — (и правая —), играющие роль знаков препинания.

Заметим, что буквы латинского алфавита a, b, c, ..., x, y, z применяются не только в качестве **переменных,** как Вы говорили, но и в качестве **постоянных.**

Как Вы представляете себе различие между этими двумя применениями букв латинского алфавита?

С. Переменные могут принимать любые значения из некоторого заданного множества, постоянные же имеют только одно значение.

А. Иначе говоря, постоянная — это имя некоторого предмета. Например, 5 — имя определенного числа (скажем, числа пальцев человеческой руки). Когда речь идет о произвольном, но фиксированном числе, то можно его обозначить и какой-нибудь буквой, например a, или буквой с индексом: x_1. В таком случае эти буквы играют роль постоянных (имен). Переменная же, в отличие от постоянной, не обозначает какой-нибудь определенный предмет (определенное число). Она играет роль «пустого места», которое разрешается заполнять именами

элементов некоторого множества (области значений переменной). Например, переменная x в выражении $3+x$ играет ту же роль, что и пустое место, обозначенное тремя точками в «$3+\ldots$».

С. По существу, я это имел в виду.

А. В таком случае Вы правильно понимаете различие между переменной и постоянной.

Отметим здесь, что в школьной алгебре мы пользуемся и другими знаками, например обозначающими операции возведения в степень или извлечения корня. Но эти знаки, как и указанные Вами знаки вычитания и деления, можно уже определить с помощью других знаков из Вашего перечня.

С. Например, $b^2=b\cdot b$, а $\sqrt{a}=b$ тогда и только тогда, когда $b^2=a$; $a-b=c$ тогда и только тогда, когда $b+c=a$ и $a:b=c$ тогда и только тогда, когда $b\cdot c=a$.

А. Совершенно верно. Таким образом, алфавит языка школьной алгебры можем ограничить названными Вами знаками, которые по аналогии с буквами алфавита, например русского языка, называют **буквами** этого алфавита.

По определенным правилам строятся конечные последовательности букв — **слова** в этом алфавите. Мы будем различать два вида слов:

термы и **формулы** —

аналоги имен существительных и повествовательных предложений.

С. Каковы же эти правила?

А. Мы их сформулируем в виде определений термов и формул. Определение терма:

1. Постоянные и переменные — термы;
2. Если t_1 и t_2 — термы, то $(t_1)+(t_2)$ и $(t_1)\cdot(t_2)$ — термы;
3. Других термов нет.

С. Будет ли согласно этому определению, например, выражение $(a+2)\cdot 3+b\cdot c$ термом?

А. Давайте проанализируем, как составлено это слово:

1. a, 2, 3, b, c — термы (по п. 1 определения);
2. $(a)+(2)$ — терм (из 1 по п. 2 определения).

Обычно условливаются опускать скобки, если терм состоит из одной буквы, т. е. вместо $(a)+(2)$ пишем $a+2$.

3. $(a+2)\cdot 3$ — терм (из 1 и 2 по п. 2);

4. $b\cdot c$ — терм (из 1 по п. 2);

5. $((a+2)\cdot 3)+(b\cdot c)$ — терм (из 3, 4 по п. 2).

Обычно опускают скобки, условившись, что знак умножения связывает сильнее знака сложения. Получаем $(a+2)\cdot 3+bc$.

С. Понятно. Но по мере введения новых знаков мы строим новые термы. Например, после введения знака деления (:) мы рассматриваем новые термы вида $a:b$. А как быть в случае, когда $b=0$?

А. Этот терм обозначает имена чисел при условии, что $b\neq 0$, причем термы строят и на языке геометрии.

С. По-видимому, отдельные буквы A, B, C, ...; a, b, c, ... — постоянные, имена точек и прямых.

А. И эти же буквы иногда применяются в качестве переменных для точек, прямых.

С. Но какие здесь имеем операции?

А. В геометрии имеем ряд **унарных** операций, т. е. выполняемых над одним объектом, в отличие от **бинарных,** выполняемых над двумя объектами, как, например, сложение или вычитание чисел.

Например, если S_l — обозначает осевую симметрию с осью l, то $S_l(A)$ — образ некоторой точки A в этой симметрии. Если Z_o обозначает симметрию с центром O, то $Z_o(A)$ — образ точки A в этой симметрии. Если R_o^α обозначает поворот вокруг точки O на угол α, то $R_0^\alpha(A)$ — образ точки A в повороте.

С. Значит, выражения $S_l(A)$, $z_0(A)$ и $R_0^\alpha(A)$ — термы.

А. И смысл их такой же, как и термов на языке алгебры.

Если термы не содержат переменных, то они имеют тот же смысл, что имена существительные, только в алгебре — это имена чисел, в геометрии же — имена точек, прямых или других геометрических фигур. Если термы содержат переменные, как, например, $x+3$, то они представляют собой **имен-**

ные формы (или формы для имен), которые обращаются в имена лишь после подстановки вместо переменных каких-нибудь их значений (так, $1+3$, $2+3$, $3+3$, $15+3$ и т. п.— имена чисел, полученные из одной именной формы $x+3$ подстановкой значений вместо переменной x).

С. В геометрии мы ведь пользуемся и обозначениями для векторов и операций над ними. На языке векторов, по-видимому, мы тоже имеем дело с термами.

А. Конечно. Знаки $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., $\vec{x}$ — имена или переменные для векторов — представляют собой элементарные термы. Из них по правилам, аналогичным тем, которые мы сформулировали для языка алгебры, строятся новые термы, например $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}(\vec{b}+\vec{0})$ и др.

С. Теперь, кажется, понятно, как из термов образуются элементарные формулы. Если два терма соединить знаком какого-нибудь отношения, например «$=$» или «$<$», или «$>$», или «$\perp$», или «$\parallel$», то получается формула.

А. Вы правильно поняли. Вполне естественно, что термы соединяются знаком отношения из того же языка, т. е. такого отношения, в котором могут находиться объекты, обозначаемые этими термами (числа могут находиться в одном из отношений «$=$», «$<$», «$>$», прямые или плоскости могут находиться в одном из отношений «$\perp$», «$\parallel$» и т. д.).

Если же два терма соединяются знаком отношения из другого языка, которое не применимо к объектам, обозначаемым этими термами, то получается бессмысленное выражение (состоящее из знаков различных языков), которое мы не должны отнести к формулам.

Обратим теперь внимание на различие между формулами, содержащими и не содержащими переменные. Возьмем в качестве примера три формулы: (1) $2+3=5$; (2) $4+3=5$; (3) $x+3=5$.

Чем различаются эти формулы по своему значению?

С. Формула (1) выражает истинное высказыва-

ние, формула (2) — ложное, а формула (3), содержащая переменную, не выражает определенного высказывания.

А. Это верно. Но если в формуле (3) вместо x подставить какое-нибудь значение (из области значений этой переменной), то получим формулу, выражающую высказывание, истинное или ложное в зависимости от того, какое значение подставили.

С. В частности, если подставить в (3) вместо x значение 2, получим истинное высказывание (1), если же подставить 4 — ложное высказывание (2).

А. В логике формулы с переменными, обращающиеся в высказывания при подстановке вместо переменных каких-нибудь их значений, называют также **высказывательными формами.**

Это название говорит о том, что мы имеем здесь лишь «формы для высказываний». Одна такая форма порождает множество высказываний (одной формы). Причем это множество может быть конечным или бесконечным в зависимости от того, является область значений переменных конечной или бесконечной.

В этом кроется значимость разного рода переменных, широко используемых в математическом языке. Они позволяют выражать на этом языке общие закономерности с помощью высказывательных форм.

С. Нельзя ли привести пример?

А. Сравните две высказывательные формы (формулы с переменными): $x + 3y = 10$ (13); $x + y = y + x$, где $x, y \in \boldsymbol{Z}$ (14).

С. Формула (13) верна не для всех пар целых чисел. Например, если подставить $x = 2$ и $y = 1$, то получим $2 + 3 \cdot 1 = 10$, т. е. ложное высказывание. Формула же (14) верна для любых двух целых чисел, она выражает закон коммутативности сложения в $\boldsymbol{Z}$.

А. Совершенно верно. Иными словами, каждая из формул (13), (14) порождает во множестве $\boldsymbol{Z}$ бесконечное множество высказываний. Но если среди высказываний, порождаемых формулой (13), имеются как истинные, так и ложные, то множест-

во высказываний, порождаемых формулой (14), состоит из одних истинных высказываний.

С. Я так понял, что если все буквы, входящие в формулу, применены в качестве постоянных (имен объектов), то формула выражает высказывание. Если же хотя бы одна буква применяется в качестве переменной, то эта формула представляет собой лишь форму для высказываний (высказывательную форму).

А. Хотя в тех примерах, которые мы приводили, это действительно так, но, оказывается, вообще не всегда формула, содержащая переменную,— высказывательная форма. Отличают еще **свободные** и **связанные** вхождения переменных.

Например, формула $x^2 = 4$ — высказывательная форма, а вот формула $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$ обозначает истинное высказывание.

В первой из этих формул переменная x входит свободно (является свободной переменной), во второй же она входит связанно (является связанной переменной), она связана оператором $\lim\limits_{x \to 2}$.

Как же можно теперь уточнить Ваше заключение, касающееся высказывательной формы?

С. Формула, содержащая хотя бы одну свободную переменную, обозначает высказывательную форму.

А. Верно. В математике мы часто имеем дело с переменными, связанными логическими операторами, о которых речь пойдет дальше.

Теперь же попытаемся перевести на математический язык тот факт, что высказывательная форма обращается в истинное или ложное высказывание при подстановке вместо переменных их значений.

Рассмотрим в качестве примера высказывательную форму $x + 3 = 5$, где $x \in A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Обозначим **истинностные значения** высказываний через И (истина) и Л (ложь) и представим результат подстановки значений x в высказывательную форму в виде таблицы:

A	$x+3=5$	И или Л?
1	$1+3=5$	Л
2	$2+3=5$	И
3	$3+3=5$	Л
4	$4+3=5$	Л
5	$5+3=5$	Л

Что задает эта таблица?

С. Мне кажется, что она задает некоторое соответствие, или функцию.

А. Правильно. Мы действительно имеем здесь функцию, определенную на множестве A, принимающую значения из множества {И, Л}, т. е. функцию вида

$$A \to \{И,\ Л\}.$$

Такая функция, принимающая значения И или Л, называется **логической функцией,** или **предикатом** (одноместным).

Высказывательная форма с двумя переменными называется логической функцией двух переменных, или **двухместным предикатом.**

Рассмотрим высказывательную форму $x+2y=8$ и область значений переменных — то же множество $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Результат подстановки значений переменных можно представить в виде таблицы с двумя входами (один для x, другой для y):

$x \backslash y$	1	2	3	4	5
1	Л	Л	Л	Л	Л
2	Л	Л	И	Л	Л
3	Л	Л	Л	Л	Л
4	Л	И	Л	Л	Л
5	Л	Л	Л	Л	Л

Как видно, эта двухместная высказывательная форма также определяет некоторую логическую функцию.

С. Каждой паре чисел из A ставится в соответствие И или Л.

А. Совершенно верно.

Множество всевозможных пар элементов из A называется также произведением множества A на самого себя и обозначается через $A \times A$, или A^2 (т. е. $A^2 = \{(x, y) \mid x \in A \text{ и } y \in A\}$).

Таким образом, мы имеем здесь логическую функцию вида

$$A^2 \to \{И, Л\},$$

или **двухместный предикат.**

С каждым предикатом связаны три множества:

1) **область определения** (в первом нашем примере — это множество A, во втором — A^2);

2) **область значений** — в любом предикате одно и то же — {И, Л};

3) **область истинности** — подмножество области определения, на котором предикат принимает значение И (в первом примере — это {2}, во втором — $\{(2; 3), (4; 2)\}$).

С. Так как Ваши примеры высказывательных форм $x + 3 = 5$ и $x + 2y = 8$ представляют собой уравнения, то области истинности этих предикатов — множества решений этих уравнений. А области истинности предикатов, определяемых неравенствами $x + 3 < 5$ и $x + 2y < 8$, будут ли множествами решений этих неравенств?

А. Конечно. Вот видите, мы попутно раскрыли логическую сущность уравнений и неравенств, они представляют собой предикаты.

С. Все это понятно. Но слово «предикат», кажется, в переводе на русский язык означает сказуемое. Здесь же предикат — функция определенного вида, логическая функция. Есть ли какая-нибудь связь между ними?

А. Несомненно. Традиционная или, как еще ее называют, аристотелевская формальная логика расчленяла элементарные высказывания на две части: **субъект** (логическое подлежащее) — то, о чем идет речь в высказывании, и **предикат** (логическое сказуемое) — то, что утверждается или отрицается в высказывании о субъекте.

Например, в высказывании «2 — простое число» имеем: «2» — субъект, а свойство «быть простым числом», приписываемое субъекту,— предикат; в высказывании «углы прямоугольника — прямые» имеем: «углы прямоугольника» — субъект, а свойство «быть прямым», приписываемое субъекту,— предикат. Причем эти высказывания утвердительные, т. е. в них устанавливается наличие соответствующего свойства у субъекта. В высказывании же «1 не есть простое число» отрицается свойство (предикат) «быть простым числом» у субъекта.

Как же в современной формальной (математической) логике математизируется это расчленение предложения на субъект и предикат?

Оказывается, что элементарное предложение такого рода, выражающее свойство предмета, можно связать с функцией одной переменной $P(x)$, при этом сама функция P — логическая функция одной переменной, т. е. одноместный предикат, а аргумент x — субъект.

Например, если P — предикат, выражающий свойство «быть простым числом», а $x \in \boldsymbol{N}$, то $P(x)$ — предложение (высказывательная форма) «x — простое число». В результате подстановки вместо x числа 2 получим $P(2)$ — истинное высказывание «2 — простое число», а в результате подстановки числа 1 получим $P(1)$ — ложное высказывание «1 — простое число», т. е. $P(2) = \text{И}$, $P(1) = \text{Л}$. Аналогично, $P(3) = \text{И}$, $P(4) = \text{Л}$, $P(5) = \text{И}$, $P(6) = \text{Л}$, $P(7) = \text{И}$, $P(8) = \text{Л}$, $P(9) = \text{Л}$ и т. д.

Таким образом, высказывательная форма $P(x)$ в приведенном истолковании определяет некоторую функцию типа

$$P\colon \boldsymbol{N} \to \{\text{И}, \text{Л}\},$$

которую мы и называли одноместным предикатом.

С. Но как быть с высказываниями вида $2 < 3$ или $2 + 3 = 5$? Что у них является субъектом, что — предикатом?

А. Ваш вопрос и говорит о неудовлетворительности традиционного разбиения предложения на субъект и предикат. В этих предложениях мы имеем

несколько субъектов. Конечно, можно и здесь объявить субъектом пару чисел (2; 3) или тройку (2; 3; 5) и предикатом соответственно свойство пары, состоящее в том, что первое число меньше второго, и свойство тройки, состоящее в том, что сумма первых двух чисел равна третьему. Но такое «склеивание» нескольких субъектов в один и представление отношения (бинарного или тернарного) в виде свойства пары или тройки чисел не всегда устраивает математику.

Математизация же понятия предиката на базе идеи функции сразу позволяет рассматривать логические функции не только одной, но и двух, трех и более переменных, т. е. двухместные, трехместные и вообще n-местные предикаты, выражающие бинарные, тернарные и вообще n-арные отношения, при этом субъекты (2, 3 и вообще n) становятся аргументами.

Например, двухместная высказывательная форма

$$P(x,\ y):\ x < y,\ \text{где}\ x,\ y \in \boldsymbol{N},$$

определяет двухместный предикат

$$P:\ \boldsymbol{N}^2 \to \{\text{И},\ \text{Л}\}.$$

Приведенное Вами высказывание $2 < 3$ является результатом подстановки в $P(x,\ y)$ вместо x числа 2, вместо y значения 3, т. е. $P(2,\ 3)$. Ясно, что $P(2,\ 3) = \text{И}$, а $P(3,\ 2) = \text{Л}$.

Трехместная высказывательная форма

$$S(x,\ y,\ z):\ x + y = z,\ \text{где}\ x,\ y,\ z \in \boldsymbol{N},$$

определяет трехместный предикат

$$S:\ \boldsymbol{N}^3 \to \{\text{И},\ \text{Л}\}$$

($\boldsymbol{N}^3$ — множество всевозможных троек натуральных чисел, т. е.

$$\boldsymbol{N}^3 = \{(x,\ y,\ z) \mid x \in \boldsymbol{N},\ y \in \boldsymbol{N}\ \text{и}\ z \in \boldsymbol{N}\}),$$

причем $S(2,\ 3,\ 5) = \text{И}$, а, например, $S(4,\ 3,\ 5) = \text{Л}$.

С. Это я уже понял.

Как же из элементарных формул строятся математические предложения?

А. Чтобы выяснить, как из элементарных предложений (формул) образуются составные (сложные) предложения (формулы) с помощью логических связок, проанализируем ряд примеров.

Из двух элементарных формул $x \in A$ и $x \in B$ можно образовать следующие составные предложения:

(1) «**Неверно, что** $x \in A$» (обычно, в том числе и в школьной математике, это предложение записывается кратко «$x \notin A$»);

(2) «$x \in A$ и $x \in B$» (равносильно «$x \in A \cap B$» — «x принадлежит **пересечению** множеств A и B»);

(3) «$x \in A$ **или** $x \in B$» (равносильно «$x \in A \cup B$» — «x принадлежит **объединению** множеств A и B»);

(4) «**если** $x \in A$, **то** $x \in B$»;

(5) «$x \in A$ **тогда и только тогда, когда** $x \in B$» (равносильно «$A = B$» — «множества A и B равны», состоят из одних и тех же элементов);

(6) «**для всякого** x, **если** $x \in A$, **то** $x \in B$» (равносильно «$A \subseteq B$» — «A включается в B», все элементы из A являются элементами B);

(7) «**существует** x такое, что $x \in A$» (равносильно «$A \neq \varnothing$», A — не пустое множество).

Какие словесные выражения фигурируют в приведенных предложениях в качестве логических связок?

С. **«Неверно, что», «и», «или», «если ... то», «тогда и только тогда, когда», «для всякого», «существует».**

А. Для выделения **логической структуры** этих (и других) предложений мы будем дальше пользоваться некоторыми применяемыми в математической логике символическими обозначениями логических связок:

неверно, что — $\neg$ — знак **отрицания;**
и — $\wedge$ — знак **конъюнкции;**
или — $\vee$ — знак **дизъюнкции;**
если ... то — $\Rightarrow$ — знак **импликации;**
тогда и только тогда, когда — $\sim$ — знак **эквиваленции;**
для всякого — $\forall$ — знак **квантора общности;**
существует — $\exists$ — знак **квантора существования.**

С. А «отрицание», «конъюнкция», «дизъюнкция» и т. д. — названия логических операций, обозначаемых этими знаками?

А. Верно, и к этим операциям мы еще вернемся.

С помощью перечисленных выше символов предложения (1) — (7) запишутся так:

(1) $\neg (x \in A)$;
(2) $(x \in A) \wedge (x \in B)$;
(3) $(x \in A) \vee (x \in B)$;
(4) $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$;
(5) $(x \in A) \sim (x \in B)$;
(6) $\forall x((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$;
(7) $\exists x(x \in A)$.

С. Вы говорили о выделении логической структуры этих (и других) предложений. Что надо понимать под логической структурой предложения?

А. **Логическая структура (форма)** предложения получается, если мы заменим в нем составляющие его элементарные формулы какими-нибудь буквами, т. е. логическая структура или форма предложения — то, что остается, когда мы отвлекаемся от его содержания, заложенного (выраженного) в его элементарных составляющих.

Если, например, элементарную формулу $x \in A$ обозначить через P (или $P(x)$), а формулу $x \in B$ — через Q (или $Q(x)$), то логические структуры предложений (1) — (7) запишутся так:

(1) $\neg P$ (или $\neg P(x)$);
(2) $P \wedge Q$ (или $P(x) \wedge Q(x)$);
(3) $P \vee Q$;
(4) $P \Rightarrow Q$;
(5) $P \sim Q$;
(6) $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$;
(7) $\exists x\ P(x)$.

С. По-видимому, первые 5 связок применимы и к высказываниям, и к высказывательным формам, а последние две — лишь к высказывательным формам.

А. Совершенно верно. Кванторы общности и существования имеет смысл применить лишь к высказывательным формам, содержащим свободные переменные. В результате этого применения перемен-

ная, на которую «навешивается» квантор, становится **связанной** (этим квантором). Если, например, в (6) нас интересует лишь квантор, то можно обозначить высказывательную форму $P(x) \Rightarrow Q(x)$ через $A(x)$. Получим структуру (6′) $\forall x\ A(x)$.

Таким образом, одно и то же предложение может подвергаться более или менее глубокому анализу с целью выделения его логической структуры (так, в результате различного анализа предложения (6) мы получили его логическую структуру в виде (6) или (6′)).

С. Получается, что все содержание сложного предложения как бы заложено в составляющих его элементарных предложениях (формулах). Если мы заменили элементарные формулы какими-нибудь буквами, то осталась одна форма предложения без содержания.

А. С опущенным содержанием. И каждой из форм или структур (1) — (7) могут обладать предложения различного математического или нематематического содержания, если фигурирующие в этих формах буквы P и Q воспринимать как переменные, вместо которых можно подставить произвольные элементарные (или неэлементарные) предложения (формулы).

С. Это понятно. Теперь, по-видимому, уже можно уточнить, как устроены математические предложения.

А. Математические предложения строятся из элементарных формул и логических связок по простым правилам, которые можно объединить в виде следующего определения:

1. Элементарные формулы — предложения (элементарные).

2. Если A — предложение, то **«неверно, что A»** ($\neg A$) — предложение.

3. Если A и B — предложения, то

«A **и** B» ($A \wedge B$),

«A **или** B» ($A \vee B$),

«если A, **то** B**»** ($A \Rightarrow B$).

«A **тогда и только тогда, когда** B» ($A \sim B$) — предложения.

4. Если $A(x)$ — предложение, содержащее свободную переменную x, то **«для всякого** x $A(x)$» ($\forall x\ A(x)$) и **«существует** x **такое, что** $A(x)$» ($\exists x\ A(x)$) — предложения, в которых x уже связанная переменная.

5. Других предложений, кроме образованных в соответствии с п. 1—4, нет.

С. И всякое предложение, построенное по этим правилам, является математическим, если элементарные формулы, из которых оно образовано, математического содержания?

А. Совершенно верно.

С. А обратное тоже верно? Всякое ли математическое предложение, сформулированное или записанное на словесном языке, можно представить в виде, соответствующем этому определению?

Например, как представить в таком виде предложение «Всякий прямоугольник — параллелограмм»?

А. Это предложение обладает структурой

$$(6) \qquad \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)),$$

если под $P(x)$ будем понимать одноместную высказывательную форму «x — прямоугольник», а под $Q(x)$ — «x — параллелограмм».

$P(x)$ и $Q(x)$ — предложения в силу п. 1 определения;

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ — предложение в силу п. 3,

а $\forall x\ P(x) \Rightarrow Q(x))$ — в силу п. 4.

С. Но при таком понимании $P(x)$ и $Q(x)$ предложение (6) читается так: «Для всякого x, если x — прямоугольник, то x — параллелограмм».

А. Это предложение выражает то же, что и предложение: «Всякий прямоугольник — параллелограмм».

Можно привести примеры предложений и более сложной структуры, в которой участвуют несколько логических связок, не выделяемых в обычной словесной формулировке.

Возьмем в качестве примера предложение: «Множество простых чисел бесконечно». Это предложение можно сформулировать иначе (в полной логической форме, с выделением всех логических связок)

следующим образом: «Для любого числа a, если a — простое число, то существует число b такое, что b больше a и b — простое число». Эта необычная словесная форма помогает нам осуществить перевод предложения на символический (логико-математический) язык. Из этой формы сразу же видно, что необходимо ввести одноместный предикат P, выражающий свойство «быть простым числом» ($P(a)$ — «a — простое число»; $P(b)$ — «b — простое число»), и двухместный предикат Q, выражающий бинарное отношение «больше» ($Q(b, a)$ — «$b > a$»).

С помощью этих обозначений наше предложение запишется так:

$$\forall a(P(a) \Rightarrow \exists b(Q(b, a) \wedge P(b)). \qquad (*)$$

Сможете сейчас доказать, что запись (*) представляет собой предложение в силу данного выше определения?

С. Наверное, смогу.

1. $Q(b, a)$ — предложение (элементарное);	1. п. 1;
2. $P(b)$ — предложение (элементарное);	2. п 1;
3. $Q(b, a) \wedge P(b)$ — предложение;	3. из 1, 2, п. 3;
4. $\exists b(Q(b, a) \wedge P(b))$ — предложение;	4. из 3, п. 4;
5. $P(a)$ — предложение (элементарное);	5. п. 1;
6. $P(a) \Rightarrow \exists b(Q(b, a) \wedge P(b)$ — предложение;	6. из 5, 4, п. 3;
7. $\forall a(P(a) \Rightarrow \exists b(Q(b, a) \wedge \wedge P(b)))$ — предложение;	7. из 6, п. 4.

А. Превосходно! Если мы отвлечемся от значений предикатов P и Q, т. е. будем рассматривать буквы P и Q как переменные для одноместного и двухместного предикатов соответственно, то запись (*) будет представлять собой не конкретное предложение, а лишь форму (структуру), которой могут обладать предложения различного содержания.

С. Здесь содержание определяется выбором предикатов P и Q?

А. Точнее, выбором некоторой конкретной интерпретации для этих **предикатных переменных,** а следовательно, и для всей формулы.

С. Что Вы имеете в виду под интерпретацией?

А. Под интерпретацией здесь имеется в виду сопоставление с одноместной предикатной буквой P определенного свойства элементов некоторого множества D — **области интерпретации;** с двухместной предикатной буквой Q — некоторого бинарного отношения между элементами D, при этом переменные a, b принимают значения из D.

В нашей исходной интерпретации формулы (*) D — множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел, P обозначает свойство «быть простым числом» (во множестве $\boldsymbol{N}$), Q обозначает отношение «больше» в $\boldsymbol{N}^2$, a, b — переменные для натуральных чисел (значениями которых являются натуральные числа). В этой интерпретации форма (*) представляет собой запись предложения, выражающего истинное высказывание.

С. Если можно, приведите другую интерпретацию формы (*).

А. Можно, разумеется. Пусть область интерпретации D — множество Q рациональных чисел, P обозначает свойство «быть положительным числом», а Q — отношение «меньше». В этой новой интерпретации форма (*) порождает предложение: «Для любого рационального числа a, если a — положительное, существует рациональное число b такое, что оно меньше a и тоже положительное». Как видите, это предложение выражает истинное высказывание, которое можно сформулировать и так: «Во множестве рациональных чисел нет наименьшего положительного числа».

С. В любой ли интерпретации форма (*) даст предложение, выражающее истинное высказывание?

А. Не в любой. Достаточно в последней интерпретации изменить значение предикатной переменной P следующим образом: P обозначает свойство «быть натуральным числом», и мы получим ложное

высказывание: «Нет наименьшего натурального числа».

С. Однако нет ли таких логических структур (форм), которые в любой интерпретации дают истинное предложение?

А. Вы затронули чрезвычайно важный вопрос. Есть такие формы, и они играют основную роль в логике. Но перед тем, как рассматривать их, нам нужно прежде всего выяснить, от чего зависит и как определить **истинностное значение** (И или Л) сложного предложения.

С. По-видимому, это значение зависит от истинностных значений элементарных формул, из которых образовано сложное предложение.

А. И от логической структуры последнего. Чтобы выяснить, **как** истинностное значение сложного предложения зависит от истинностных значений составляющих его элементарных предложений и от логической структуры, необходимо определить все логические связки (или обозначаемые ими логические операции), с помощью которых из элементарных формул строятся предложения.

В определениях логических связок, по существу, фиксируется тот смысл, в котором они обычно применяются.

Первые пять связок: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\sim$ можно определить с помощью соответствующих **истинностных таблиц.**

A	$\neg A$
И	Л
Л	И

(истинностная таблица отрицания).

Среди перечисленных пяти связок знак отрицания $\neg$ является единственным **унарным** оператором, т. е. применимым к одному предложению (высказыванию или высказывательной форме).

С. Для высказываний эта таблица понятна: если A — истинное высказывание, то его отрицание $\neg A$ — ложное высказывание, если же A — ложно, то $\neg A$ истинно. Но как понимать эту таблицу, если A — высказывательная форма?

А. В этом случае таблицу надо понимать так.

Пусть, например, A — одноместная высказывательная форма. Обозначим ее через $A(x)$. Тогда в любой интерпретации с областью D при любом значении x из D, при котором $A(x)$ обращается в истинное высказывание, $\neg A(x)$ обращается в ложное; при любом же значении x из D, при котором $A(x)$ обращается в ложное высказывание, $\neg A(x)$ обращается в истинное.

С. И так же, по-видимому, следует понимать эту таблицу, если A, например, двухместная высказывательная форма.

А. Разумеется.

Приведем теперь истинностную таблицу для четырех бинарных логических операций: **конъюнкции** ($\wedge$), **дизъюнкции** ($\vee$), **импликации** ($\Rightarrow$) и **эквиваленции** ($\sim$), обозначаемых в обыденной речи соответственно словами: **«и»**, **«или»**, **«если ... то»** и **«тогда и только тогда, когда»**:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \sim B$
И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И	Л
Л	Л	Л	Л	И	И

С. По этой таблице у меня возникли некоторые вопросы. Определение конъюнкции действительно соответствует обычному смыслу **«и»**: когда мы соединяем союзом **«и»** два предложения, то полученное предложение считаем истинным только тогда, когда истинны оба составляющих предложения. А вот союз **«или»** уже не всегда так понимается, как в приведенной таблице.

А. Вы правы. В приведенном определении дизъюнкции **«или»** понимается в неразделительном смысле. В этом случае образованное предложение истинно, когда истинно хотя бы одно из составляющих его предложений. Однако союз **«или»** применяется также в разделительном смысле (в этом случае иногда говорят **«или... или»**, **«либо... либо»**),

когда новое предложение считается истинным только тогда, когда одно из составляющих истинно, а другое ложно. Соответствующая логическая операция называется **строгой дизъюнкцией** ($\vee$).

Вы сможете сейчас составить истинностную таблицу строгой дизъюнкции?

С. Наверное, смогу.

A	B	$A \vee B$
И	И	Л
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

А. Правильно. Какие еще вопросы у Вас имеются по истинностным таблицам?

С. Не совсем понятна таблица импликации. Точнее, первые две строчки согласуются с моим пониманием выражения **«если... то»**, а вот третья и четвертая строчки кажутся неестественными.

А. Почему?

С. Непонятно, как это получается, что предложение «**Если** A, **то** B» истинно, когда A и B ложны (4-я строка), или когда A ложно, а B истинно (3-я строка).

А. Рассмотрим высказывательную форму: «Если x делится на 3, то x^2 делится на 3». Что Вы можете сказать об истинностных значениях этой высказывательной формы при различных значениях x?

С. По-моему, при любом значении x мы получим истинное высказывание.

А. Верно. Следовательно, и при $x = 9$ получаем истинное высказывание «если 9 делится на 3, то 81 делится на 3», и при $x = 10$ тоже получим истинное высказывание: «Если 10 делится на 3, то 100 делится на 3», хотя оба высказывания, составляющие эту импликацию: «10 делится на 3» и «100 делится на 3» — ложные.

Такого рода конкретные следствия из общих предложений (высказывательных форм) широко

используются в математике, и единственное отличие их от привычных разговорных оборотов состоит в том, что в математике обычно не пользуются сослагательным наклонением. В самом деле, истинность импликации: «Если **бы** 10 делилось на 3, то и 100 делилось **бы** на 3», уже никаких возражений и недоумений не вызывала **бы** (!).

С. Этим примером Вы оправдали четвертую строку таблицы импликации. А третью?

А. Возьмем в качестве примера предложение: «Если a делится на 3 и b делится на 3, то $a+b$ делится на 3».

С. Оно истинно при любых значениях a и b.

А. В таком случае при $a=5$ и $b=7$ получаем истинное высказывание: «Если 5 делится на 3 и 7 делится на 3, то $5+7$ делится на 3», в котором первое из составляющих предложений: «5 делится на 3 и 7 делится на 3» — ложное высказывание (как конъюнкция, каждое из составляющих которой ложно), а второе: «$5+7$ делится на 3» — истинное высказывание.

С. А соответствует ли таблица импликации тому смыслу, при котором оборот **«если... то»** применяется в обыденной речи?

А. Вообще этот оборот применяется чаще всего в обыденной речи для случаев, когда первое из составляющих предложений, помещенное между словами **«если»** и **«то»**, истинно, т. е. в одном из случаев, выраженных первыми двумя строками таблицы импликации. Однако можно показать и на нематематическом материале естественность последних двух строчек таблицы.

Допустим, Вы договорились со своими друзьями: «Если в воскресенье будет хорошая погода, то мы поедем за город». С точки зрения здравого смысла естественно считать это высказывание ложным в том и только в том случае, если будет нарушен договор, т. е. если в воскресенье будет хорошая погода, а Вы не поедете за город. Во всех же остальных случаях, в том числе если в воскресенье будет плохая погода и Вы поедете или не поедете за город, т. е. во всех случаях, когда договор не

нарушен, естественно считать рассматриваемую импликацию истинной.

С. Но могут возникнуть разногласия в оценке погоды.

А. Такие разногласия находятся вне области логики, поэтому мы предполагаем, что в оценке погоды не возникло разногласий.

С. По приведенным истинностным таблицам у меня больше вопросов нет. Но как определить истинностное значение высказывания с квантором?

А. Высказывание $\forall xA(x)$ истинно в данной интерпретации, если высказывательная форма $A(x)$ обращается в истинное высказывание при подстановке вместо x любого значения из области D этой интерпретации, и ложно в этой интерпретации, если найдется хотя бы одно значение x из D, при подстановке которого в $A(x)$ эта высказывательная форма обращается в ложное высказывание.

Высказывание $\exists\ xA(x)$ истинно в данной интерпретации, если в области D этой интерпретации найдется хотя бы одно значение x, подстановка которого вместо всех свободных вхождений x в $A(x)$ обратит эту высказывательную форму в истинное высказывание, и ложно в этой интерпретации, если подстановка любого значения x из D обращает высказывательную форму $A(x)$ в ложное высказывание.

С. По существу, это соответствует обычному смыслу слов «все» и «существует». Получается, что истинностное значение высказываний $\forall\ xA(x)$ и $\exists\ xA(x)$ не зависит от отдельного значения x. Это значение зависит от интерпретации. А существуют ли такие предложения с кванторами, которые истинны в любой интерпретации?

А. Существуют. Вы уже задали аналогичный вопрос, касающийся логических структур (форм) без кванторов. Подобные формы представляют особый интерес, так как независимо от содержания, истинностных значений входящих в них элементарных формул или интерпретации предикатов **всегда** обращаются в истинные высказывания. Они истинны в силу одной своей логической формы.

Такие логические структуры (формы) называются **тавтологиями,** или **общезначимыми формами.** Они выражают законы логики, на которых основаны всякие рассуждения, в том числе и доказательства математических предложений.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим высказывание

А: «Точка P лежит на прямой p»

и его отрицание

$\neg$ А: «Точка P не лежит на прямой p».

Что Вы можете сказать об истинностном значении высказывания A?

С. Пока ничего. Высказывание A может быть истинным, если точка P действительно лежит на прямой p, или ложным в противном случае.

А. Но что Вы можете сказать об истинностном значении дизъюнкции

$$(1)\ A \vee \neg A?$$

С. Она истинна, когда истинно хотя бы одно из составляющих A или $\neg A$.

А. Это верно для любой дизъюнкции. Но может ли форма (1) обращаться в ложное высказывание?

С. По-видимому, не может. Если A истинно, то и (1) истинно, если же A ложно, то тогда $\neg A$ истинно и (1) снова истинно.

А. Значит, форма (1) **всегда истинна,** и это не зависит от содержания. Любое высказывание такой формы будет истинным в силу одной своей структуры. Например, высказывание: «Могилев стоит на Днепре или Могилев не стоит на Днепре», имеет такую же логическую структуру $(A \vee \neg A)$, и мы утверждаем, что оно истинно, не используя при этом никаких знаний нелогического происхождения (даже если мы забыли географию и не помним, стоит Могилев на Днепре или нет). Или, например, высказывание: «М. способный или М. неспособный», истинно в силу одной логической структуры (принадлежности к классу предложений формы $A \vee \neg A$), независимо от того, способный или неспособный М. И мы можем утверждать, что это высказывание истинно, не зная даже, о ком идет в нем речь.

С. Это понятно. Но если A — высказывательная форма, то будет ли (1) всегда истинно?

А. Будет, так как в любой интерпретации, если $A(x)$ обращается в ложное высказывание при некотором значении x из области D этой интерпретации, то $\neg A(x)$ обращается при этом значении x в истинное высказывание и дизъюнкция $A(x) \vee \neg A(x)$ снова **всегда** истинна (здесь «всегда» означает при любом значении x из области D произвольной интерпретации).

Таким образом, $A \vee \neg A$ — тавтология. Она выражает широко применяемый закон логики, называемый **законом исключенного третьего.** (Известно и латинское название этого закона — *Tertium non datur*, что в дословном переводе на русский язык означает: «Третьего не дано».)

Отвлекаясь от содержания A (рассматривая букву A как переменную для высказываний или высказывательных форм), легко доказать с помощью истинностной таблицы, что форма (1) — тавтология:

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
И	Л	И
Л	И	И

Пример 2. Рассмотрим теперь конъюнкцию двух предложений (высказываний или высказывательных форм), из которых одно — отрицание другого, т. е. форму $A \wedge \neg A$, например: «Точка P лежит на прямой p **и** точка P **не** лежит на прямой p».

С. Это высказывание всегда ложно, так как точка P не может одновременно лежать и не лежать на прямой p.

А. И это мы можем утверждать *à priori*, т. е. до всякого опыта, выясняющего, лежит или не лежит точка P на прямой p.

Следовательно, отрицание этой конъюнкции

$$(2) \quad \neg(A \wedge \neg A)$$

будет всегда, т. е. в любой интерпретации, истинно.

Докажите это с помощью истинностной таблицы!

С.

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$	$\neg(A \wedge \neg A)$
И	Л	Л	И
Л	И	Л	И

А. Логический закон, выражаемый тавтологией (2), называется **законом противоречия.**

Пример 3. Рассмотрим еще раз высказывание A: $P \in p$, его отрицание $\neg A$: $P \notin p$ и отрицание этого отрицания $\neg\neg A$: неверно, что $P \notin p$.

С. Последнее высказывание ($\neg\neg A$) означает то же, что и первое (A).

А. Что Вы понимаете под «означает то же»?

С. Эти высказывания выражают один и тот же факт в разных формах, и если одно из них истинно, то и другое истинно, если одно ложно, то и другое ложно.

А. Иными словами, эти два высказывания имеют всегда одинаковые истинностные значения, или эквиваленция

$$(3)\quad \neg\neg A \sim A\ —$$

тавтология.

Подтвердите это с помощью соответствующей истинностной таблицы!

С.

A	$\neg A$	$\neg\neg A$	$\neg\neg A \sim A$
И	Л	И	И
Л	И	Л	И

А. Тавтология (3) выражает **закон двойного отрицания.**

Тождественная истинность логических форм (1) — (3) сразу видна и подтверждать это с помощью истинностных таблиц нет необходимости. Однако в случае более сложных логических форм (не содержащих кванторов или высказывательных форм) истинностная таблица является эффективным способом установления того, является или нет данная логическая форма тавтологией.

С. Если последний столбик таблицы состоит из одних И, то форма — тавтология, в противном слу-

чае, т. е. если в этом столбике имеется хотя бы одно Л, она не является таковой.

А. Совершенно верно. Выясним, например, является ли эквиваленция

$$(4)\ (A \Rightarrow B) \sim (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

тавтологией.

Для этого построим соответствующую истинностную таблицу:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \sim (\neg B \Rightarrow \neg A)$
И	И	Л	Л	И	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л	И
Л	И	И	Л	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И

Как видно, эквиваленция (4) — тавтология. Она выражает **закон контрапозиции**, находящий широкое применение в косвенных доказательствах («от противного»), о которых пойдет речь дальше, в одной из будущих бесед.

Выясните теперь с помощью истинностной таблицы, является ли тавтологией форма $((A \Rightarrow B) \wedge \wedge B) \Rightarrow A$?

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge B$	$((A \Rightarrow B) \wedge B) \Rightarrow A$
И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	И	Л
Л	Л	И	Л	И

Эта форма не является тавтологией, так как есть строка таблицы, в которой она принимает значение Л.

А. Верно. Существование такой строки таблицы означает существование такой интерпретации или такого набора истинностных значений высказывательных переменных A и B, а именно (Л, И), при

котором рассматриваемая форма обращается в ложное высказывание.

С. Мы рассмотрели четыре логических закона (исключенного третьего, противоречия, двойного отрицания и контрапозиции). Есть ли еще логические законы, выражаемые с помощью тавтологий?

А. Есть и довольно много. Перечислю еще ряд тавтологий, выражающих логические законы:

$$(5)\ A \wedge B \Rightarrow C \sim A \wedge \neg C \Rightarrow \neg B.$$

(Здесь и далее мы опускаем скобки, придерживаясь следующего соглашения: каждый из знаков последовательности $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\sim$ связывает «сильнее» любого из последующих. Если восстановить все скобки, определяющие порядок выполнения операций в (5), получим $((A \wedge B) \Rightarrow C) \sim ((A \wedge \neg C) \Rightarrow \neg B)$.)

$$(6)\ A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \sim A \wedge B \Rightarrow C;$$
$$(7)\ A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \sim B \Rightarrow (A \Rightarrow C);$$
$$(8)\ (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C);$$
$$(9)\ \neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B;$$
$$(10)\ \neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B;$$
$$(11)\ A \Rightarrow B \sim \neg A \vee B;$$
$$(12)\ \neg(A \Rightarrow B) \sim A \wedge \neg B;$$
$$(13)\ (A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B;$$
$$(14)\ (A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Этот перечень можно еще далеко продолжить. Но мы ограничимся перечисленными тавтологиями (1)—(14).

Предлагаю Вам с помощью истинностных таблиц самостоятельно доказать, что формы (5)—(14) действительно тавтологии.

С. С удовольствием выполню это задание. Но как называются законы, выражаемые этими тавтологиями?

А. Некоторые из них имеют специальные названия: (5) — закон расширенной контрапозиции; (7) — закон перестановки посылок; (8) — закон силлогизма; (9), (10) — законы де Моргана (по имени английского логика прошлого века Аугуста де Моргана). Другие законы ((6), (11), (12)) просто уста-

навливают возможность выражения одних и тех же мыслей с помощью различных логических структур.

С. Я заметил, что все рассмотренные до сих пор логические законы выражаются тавтологиями, не содержащими кванторы. Существуют ли такие законы, которые нельзя выразить без использования кванторов?

А. Вы правильно заметили особенность перечисленных тавтологий. И вопрос Ваш вполне правомерен.

Все эти тавтологии записаны на языке так называемой **логики высказываний,** начальной, простейшей части математической логики. Средствами логики высказываний анализируются лишь сложные (составные) предложения и те рассуждения, в которых используется логическая структура таких предложений. Элементарные же предложения (атомы) и рассуждения, в которых используется внутренняя структура таких предложений, не анализируемы этими средствами. Поэтому на языке логики высказываний выразимы лишь те логические законы, которые не затрагивают внутреннюю структуру элементарных предложений. Однако эти законы не исчерпывают всех логических законов.

С. Значит, логики высказываний недостаточно?

А. Совершенно верно. Эта логика не расчленяет элементарные предложения, не выражает их внутреннюю (субъектно-предикатную) структуру. Более мощной, достаточной для анализа всякого рода рассуждений и доказательств, является **логика предикатов.**

С. Но Вы показали, что закон исключенного третьего имеет место и для высказывательных форм, т. е. для предикатов.

А. Это верно для всех перечисленных выше логических законов. И вообще вся логика высказываний является частью логики предикатов, но только частью. Поэтому имеются логические законы, выражаемые на языке логики предикатов, но не выражаемые на языке логики высказываний.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим два высказывания:

$$(1)\quad \neg\forall x P(x) \quad \text{и} \quad (2)\quad \exists x \neg P(x).$$

Как Вы их прочтете с помощью слов русского языка?

С. «Неверно, что для всякого x выполняется свойство P» и «Существует x, для которого не верно, что выполняется P».

А. Что Вы имеете в виду под «выполняется»?

С. Истинно.

А. Правильно. Но можно сказать и так: «Неверно, что всякий x обладает свойством P» и «Существует x, не обладающий свойством P». Давайте теперь выясним, существует ли какая-нибудь связь между истинностными значениями (1) и (2).

С. Мне кажется, что этими двумя высказываниями выражается одно и то же.

А. Можно это установить следующим образом. Рассмотрим произвольную интерпретацию логических форм (1) и (2). Если любой элемент из области D этой интерпретации обладает свойством P, то и (1), и (2) обращаются в этой интерпретации в ложные высказывания. Например, пусть D — множество прямоугольников, а P — свойство «иметь прямой угол». Тогда (1) — ложное высказывание: «Неверно, что всякий прямоугольник имеет прямой угол» и (2) — ложное высказывание: «Существует прямоугольник, не имеющий прямого угла».

Если же не все элементы D обладают свойством P, то в этой интерпретации (1) обращается в истинное высказывание. Но тогда существует хотя бы один элемент из D, не обладающий этим свойством, а значит, и (2) обращается в истинное высказывание.

Например, пусть теперь D — множество параллелограммов, а P, по-прежнему,— свойство «иметь прямой угол». Теперь (1) — истинное высказывание: «Неверно, что всякий параллелограмм имеет прямой угол» и (2) — истинное высказывание: «Существует параллелограмм, не имеющий прямого угла».

Таким образом, формы (1) и (2) в любой интерпретации обращаются обе в ложные или обе в истинные высказывания. Иными словами, нет такой

интерпретации, в которой одна из них была бы истинным высказыванием, а другая — ложным.

В таком случае, что можно утверждать об эквиваленции

$$(15)\quad \neg \forall x P(x) \sim \exists x \neg P(x)?$$

С. Эта эквиваленция всегда истинна, т. е. тавтология, а следовательно, выражает логический закон.

А. Совершенно верно. С помощью рассуждений, аналогичных только что проведенным мною, самостоятельно установите, что и эквиваленция

$$(16)\quad \neg \exists x P(x) \sim \forall x \neg P(x)$$

общезначима.

Пример 2. Рассмотрим форму

$$(17)\quad \forall x(P_1(x) \wedge P_2(x)) \sim \forall x P_1(x) \wedge \forall x P_2(x).$$

С. Общезначимость этой формы очевидна.

А. Как Вы это покажете?

С. Ведь если каждый элемент области D интерпретации обладает свойствами P_1 и P_2, то это означает, что каждый элемент обладает свойством P_1 и каждый элемент обладает свойством P_2.

А. Правильно. Возьмем теперь форму, общезначимость которой не так очевидна, а быть может, даже совсем неочевидна.

Пример 3. Рассмотрим форму

$$(18)\quad \forall x P(x) \Rightarrow P(y).$$

Как видите, в ней переменная x связана, а переменная y входит свободно. Стало быть, эта форма определяет некоторую логическую функцию от свободной переменной y (одноместный предикат) и, кажется, что в зависимости от выбранной интерпретации и подставляемого значения свободной переменной y из области D этой интерпретации форма (18) должна обращаться в истинное или ложное высказывание. Но легко установить, что ни в какой интерпретации, ни при каких значениях y она не может обращаться в ложное высказывание.

Рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть не все элементы области D интерпре-

тации обладают свойством P. Тогда первый член импликации (18) $\forall\ xP(x)$ — ложное высказывание, а значит, вся эта импликация истинна (в соответствии со строками 3 и 4 истинностной таблицы импликации).

2. Если же в некоторой интерпретации все элементы области обладают свойством P, то первый член импликации (18) $\forall\ xP(x)$ — истинное высказывание. Но в этом случае, подставив вместо свободной переменной y любое ее значение a из D, получим тоже истинное высказывание $P(a)$, так как все элементы D, в том числе и a, обладают свойством P, следовательно, опять импликация (18) истинна.

Но в любой интерпретации имеет место один и только один из двух рассмотренных случаев. Значит, форма (18) общезначима.

С. Это, действительно, как-то неожиданно, но весьма интересно.

А. Предлагаю Вам самостоятельно установить общезначимость импликации

$$(19)\quad P(y) \Rightarrow \exists\, xP(x).$$

Подскажу. Рассмотрите два случая: 1) интерпретацию, в которой второй член импликации истинный, и 2) интерпретацию, в которой он ложный.

С. С удовольствием попробую порассуждать. Но теперь мы уже подготовлены к рассмотрению вопроса, **что из чего следует.**

А. Вполне. Это и будет темой нашей следующей беседы. А пока для закрепления того, что Вы узнали в этой беседе, предложу Вам

2.1. Составьте истинностную таблицу для неравенств:

а) $x+3<5$; б) $x+3\geqslant 5$; в) $x+3>5$; г) $x+2y<8$; д) $x+2y>8$; е) $x+2y\geqslant 8$, где

x, $y \in A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, и выпишите множества решений этих неравенств.

2.2. Предикат (логическую функцию) какого вида определяет высказывательная форма:

а) $x + y = z$; б) $x + y = 10$; в) $x + 2 = 10$; г) $x + 3 < 10$; д) $x + y < z$; е) $x + y > z$; ж) $x + y < 10$; з) $x + y > 10$, где x, y, $z \in N$?

2.3. Выделите логическую структуру (форму) предложений путем замены элементарных составляющих буквами, а слов, обозначающих логические связки,— соответствующими знаками:

а) Если основание пирамиды — правильный многоугольник и высота проходит через центр основания или двугранные углы при основании равны, то пирамида — правильная.

б) Если основание пирамиды — прямоугольный треугольник, то боковая грань, проходящая через гипотенузу, перпендикулярна к плоскости основания тогда и только тогда, когда высота проходит через середину гипотенузы.

в) Если число целое или выражается обыкновенной дробью, или выражается конечной десятичной дробью, то оно представимо в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

г) Если прямая a параллельна прямой b и прямая b лежит в плоскости α, то прямая a параллельна плоскости α или лежит в плоскости α.

д) Если $a \parallel b$ и a_1 — параллельная проекция прямой a на плоскость α и b_1 — параллельная проекция прямой b на плоскость α, то $a_1 \parallel b_1$ или a_1 совпадает с b_1.

2.4. Из элементарных высказываний P: «Это число — целое»; Q: «Это число положительное»; R: «Это число простое» и S: «Это число делится на 3» составлены сложные высказывания:

а) $P \vee Q$; б) $P \wedge Q$; в) $P \vee \neg P$; г) $Q \wedge \neg Q$; д) $S \Leftrightarrow \neg R$; е) $P \wedge R \Rightarrow \neg S$; ж) $P \wedge S \Rightarrow \neg R$; з) $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg S)$; и) $(P \wedge Q \wedge R) \vee S$; к) $P \vee \neg S$; л) $\neg(Q \vee \neg Q)$.

Прочитать все эти высказывания с помощью слов русского языка. Какие из них истинны или ложны в силу одной своей структуры?

2.5. Определить значения сложных высказываний, если $P =$ Л, $Q =$ И и $R =$ И:

а) $P \wedge (Q \wedge R)$; б) $(P \wedge Q) \wedge R$; в) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$; г) $P \wedge Q \Rightarrow R$; д) $P \wedge \neg Q \Leftrightarrow R \vee \neg Q$; е) $((P \vee Q) \wedge R) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$.

2.6. а) Известно, что импликация $P \Rightarrow Q$ истинна, а эквиваленция $P \Leftrightarrow Q$ ложна. Что можно сказать об истинностном значении импликации $Q \Rightarrow P$?

б) Известно, что эквиваленция $P \Leftrightarrow Q$ истинна. Что можно сказать о значениях эквиваленций $\neg P \Leftrightarrow Q$ и $\neg Q \Leftrightarrow P$, о значениях импликаций $\neg P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$?

2.7. Докажите с помощью соответствующих истинностных таблиц, что формы (5) — (14), приведенные на с. 58, тавтологии (общезначимы).

2.8. Докажите, что импликация $P(y) \Rightarrow \exists x P(x)$ общезначима.

2.9. Пятеро ребят играют по таким правилам:

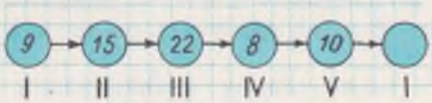
(а) игроки называют быстро, один за другим, натуральные числа; после пятого игрока число называет опять первый и т. д.

(б) если один назвал число, делящееся на 3, то следующий должен назвать число, делящееся на 5.

Игрок, нарушивший правила, теряет очко.

Ответьте на следующие вопросы:

1. Здесь изображено начало игры:



Если бы Вы были судьей, какого игрока наказали бы потерей очка? Почему?

2. Первый продолжает после пятого. Допустим, что это Вы. Какое число должны Вы назвать, чтобы не потерять очко?

3. Игрок назвал число 120, не ошибившись при этом. Может ли он с уверенностью утверждать, что предшествующий ему назвал: число, делящееся на 3; число, не делящееся на 3?