С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия
для слушателей подготовительных отделений вузов*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.161
Н 64
УДК 517 (075.4)

Никольский С. М. Элементы математического анализа: Учеб. пособие.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— С. 224.—ISBN 5-02-013957-2.

Математический анализ в этой книге изучается на геометрической и физической основе. Непрерывный график и движение сами по себе служат основой для фундаментальных выводов. Излагаются дифференциальное и интегральное исчисления и их приложения.

Последняя глава посвящена действительному числу, изучаемому на базе представления его в виде десятичной (вообще бесконечной) дроби.

Первое издание вышло в 1981 г. Для второго издания книга переработана и дополнена.

Для школьников и преподавателей средних школ. Может оказаться полезной учащимся техникумов и для самообразования.

Ил. 122.

Рецензенты:

кафедра высшей математики Московского энергетического института (заведующий кафедрой член-корреспондент АН СССР *С И. Похожаев*);

доктор физико-математических наук профессор *Г. Н. Яковлев*

Н $\dfrac{1602070000-069}{053(02)-89}$ 57-89

ISBN 5-02-013957-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Моя книга «Элементы математического анализа», изданная в 1981 г. массовым тиражом, была быстро распродана, и теперь видно, что ее целесообразно выпустить вторым изданием. Для второго издания я решил ее переработать на основании опыта, который приобрел в последние годы, занимаясь школьными учебниками.

Изменения направлены на то, чтобы книгу свободно мог читать всякий, кто знает математику в пределах 8 классов десятилетней школы Я проследил за тем, чтобы в новом издании был охвачен программный материал 9 и 10 классов. Этот материал исчерпывают первые восемь глав настоящей книги.

Появилась необходимость ввести главу «Тригонометрические функции». Тригонометрию хотя и изучают в 8 классе, но без введения тригонометрических функций, тем более без обратных тригонометрических функций.

Во втором издании читатель также обнаружит некоторые методические изменения в изложении материала о показательной функции. В школе показательную функцию проходят в 10 классе. Определение функции a^x для любых действительных x — трудный вопрос. Автор много размышлял над тем, как лучше преподнести его школьнику, чтобы было и элементарно, и научно.

Изложение понятий собственно анализа — предела, производной, интеграла — осталось прежним, как в первом издании. Понятие предела дается на интуитивной основе, выясняется на примерах, без формальных определений. Без доказательства формулируются основные свойства пределов. Такие факты как существование максимума у непрерывной на отрезке функции или существование и единственность точки пересечения непрерывного монотонного графика с прямой, параллельной оси абсцисс, обнаруживаются из рассмотрения графика. Но и при этом можно изложить вопрос совсем элементарно или провести формальные рассуждения. Последние даны петитом. Добавлена глава о дифференциальных уравнениях.

Остальные пять глав (9—13) могут быть использованы для дополнительного изучения в школах с физико-математическим уклоном. Комплексные числа, бином Ньютона, комбинаторика, приближенные вычисления — все это совершенно необходимые темы. Неплохо подвести также итог своих знаний о действительных числах. Кстати, надо сказать, что о них школьник получает довольно-таки разрозненные сведения.

Автор придает значение главе «Формула Тейлора», дающей важную точку зрения на элементарные функции. В настоящем издании вывод этой формулы приведен в более доходчивой форме, чем в первом издании. Я благодарю академика А. Д. Александрова, обратившего мое внимание на то, что в первом издании изложение этого вопроса трудное.

Эта книга будет полезна не только школьникам, но и учащимся ПТУ, техникумов и студентам вузов с очень краткой программой по математике, учителям и вообще для общего образования.

Считаю своим долгом выразить благодарность А. В. Шевкину, который помог мне написать главу «Тригонометрические функции» и перераспределить главу «Функции».

С. М. Никольский

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Я имею опыт преподавания математического анализа на элементарной основе. В тридцатых годах я преподавал в технических вузах Днепропетровска, где слушателями были в основном рабфаковцы. Сейчас я делюсь своим опытом.

Эту книгу порекомендовали мне написать академик И. М. Виноградов, академик К. К. Марджанишвили и член-корреспондент АН СССР Е. Ф. Мищенко. Они ознакомились с написанной рукописью и дали весьма ценные советы. Рукопись была прочитана подробно проф. С. И. Адяном, проф. А. А. Карацубой и официальными рецензентами издательства «Наука» проф. А. В. Ефимовым и проф. М. К. Потаповым. Они дали много ценных советов. Полезные замечания по рукописи я получил также от профессора С. А. Теляковского и Главного управления школ Министерства просвещения СССР, где она изучалась. Наконец, главу «Математический анализ» с дополнением к ней подробно изучил академик Л. С. Понтрягин. Ряд его замечаний я учел, в частности, дополнив рукопись (петитом) формальными доказательствами некоторых положений, объясненных из наглядных соображений.

Всем указанным лицам и Главному управлению школ Министерства просвещения СССР я выражаю глубокую благодарность.

Наконец, я отмечаю, что Комиссия по реформе математического образования в средней школе при Бюро отделения математики Академии наук СССР под председательством академика И. М. Виноградова рекомендовала Министерству просвещения СССР допустить данную книгу как учебное пособие для учащихся средних школ.

Сейчас, когда книга находится в корректуре, стало известно, что она рекомендована в качестве пособия для учителей. Все же я не изменяю начало своего предисловия, потому что убежден, что эта книга вполне доступна школьникам.

1980 *С. М. Никольский*

ГЛАВА 1

ФУНКЦИЯ

§ 1.1. Чем занимается математический анализ?

Название «математический анализ» — сокращенное видоизменение старого названия «анализ бесконечно малых». Последнее больше говорит, но оно тоже сокращенное. Название «анализ посредством бесконечно малых» характеризовало бы предмет более точно.

Было бы лучше, если бы название отражало те объекты, которые подвергаются анализу (изучению). В классическом математическом анализе такими объектами являются прежде всего функции, т. е. переменные величины, зависящие от других переменных величин. Функции мы всюду встречаем в практике, функции описывают движения, физические явления. Они встречаются в технике, геометрии, механике, химии, экономике. Изучая функции, мы изучаем конкретные явления, которые они описывают. Одна и та же функция может описывать явления совершенно различной природы и тем самым объединять в себе закономерности, которым эти явления подчиняются.

Математический анализ является средством изучения функций, но тогда и средством изучения окружающих нас явлений. Важными понятиями математического анализа являются предел и непрерывность функции, производная и интеграл. В этой главе читатель получит начальные сведения об этих понятиях, их связи и их приложениях.

§ 1.2. Обозначение некоторых множеств чисел

Рациональные и иррациональные числа называются *действительными числами* (см. гл. 10).

Пусть a и b — действительные числа (точки числовой прямой), удовлетворяющие неравенству $a < b$.

Отрезком $[a, b]$ называется множество чисел (точек) x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$. *Интервалом* (a, b) называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$. *Интервалом* $(-\infty, +\infty)$ называется множество всех действительных чисел x (точек числовой прямой). Говорят еще, что это есть множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $-\infty < x < +\infty$. *Интервалом* $(a, +\infty)$ называется множество чисел x, бо́льших числа a, или, как говорят, множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < +\infty$. *Интервалом* $(-\infty, b)$ называется множество чисел x, меньших числа b, или, как говорят, множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $-\infty < x < b$.

Полуинтервалом $[a, b)$ или $(a, b]$ называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$ соответственно.

Отрезок, интервал или полуинтервал мы будем называть еще *промежутком*.

Нам встретятся и другие множества (совокупности) чисел, которые не обязательно имеют специальные названия. Их обозначают разными буквами: E, A, B, ...

§ 1.3. Примеры функций

В окружающей нас действительности мы всюду наблюдаем явления, органически связанные между собой. Нередко эти явления сопровождаются связями между теми или иными величинами, заключающимися в том, что одна величина, вообще говоря переменная, зависит в силу определенного закона от другой переменной величины. В таких случаях говорят, что первая величина есть *функция* второй. При этом вторую величину называют *независимой переменной* или *аргументом*, а первую — *зависимой*.

Приведем примеры таких функций.

1. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ материальная точка находилась в покое, а затем (при $t > 0$) начала падать под воздействием силы тяжести. Тогда путь s, пройденный точкой за время t, выразится формулой

$$s = \frac{gt^2}{2} \quad (t \geqslant 0), \tag{1}$$

где g — ускорение силы тяжести. В данном случае мы имеем дело с двумя переменными величинами t и s. Каждому значению времени t в силу закона, выраженного формулой (1), приводится в соответствие определенное значение s. Этим определена функция $s = \frac{gt^2}{2}$ на множестве неотрицательных значений t.

2. Закон Бойля — Мариотта устанавливает связь между давлением и объемом данного количества газа при постоянной температуре:

$$p=\frac{c}{v} \quad (v>0), \tag{2}$$

где c — константа, v — объем, занимаемый данным количеством газа, p — его давление. Здесь p является функцией v и однозначно вычисляется по формуле (2).

3. Площадь круга радиуса r есть величина S, зависящая от r. S вычисляется по формуле

$$S=\pi r^2 \quad (r>0).$$

Если изменять r, то соответственно будет изменяться S. Поскольку здесь речь идет о площади круга, то данная функция определена на множестве положительных чисел r.

§ 1.4. Определение понятия функции

Пусть E есть множество чисел и пусть в силу некоторого вполне определенного закона каждому числу x из E приведено в соответствие одно число y; тогда говорят, что на E задана функция, которую записывают так:

$$y=f(x).$$

Это определение функции предложено Н. И. Лобачевским и Дирихле *). Множество E называют *областью задания* или *областью определения* функции $f(x)$. Говорят также, что задана *независимая переменная* x, которая может принимать частные значения x из множества E. Каждому такому значению x в силу упомянутого закона приведено в соответствие определенное значение (число) другой переменной y, называемой *функцией аргумента* x.

Для выражения понятия функции употребляют геометрический язык. Говорят, что задано множество точек x действительной прямой — *область определения функции* — и закон, в силу которого каждой точке множества E приводится в соответствие число $y=f(x)$. Если мы хотим говорить о функции как о некотором законе, приводя-

*) Н. И. Лобачевский (1792—1856) — русский математик, создатель неевклидовой геометрии. П. Г. Дирихле (1805—1859) — немецкий математик.

щем в соответствие каждому числу x из E некоторое число y, то достаточно ее обозначить одной буквой f. Символ $f(x)$ обозначает число y, которое в силу закона f соответствует числу x. Если, например, число 1 принадлежит области E определения функции f, то $f(1)$ есть *значение функции* f в точке $x=1$. Если 1 не принадлежит E, то говорят, что функция f *не определена в точке* $x=1$.

Для функций f и φ, имеющих одну и ту же область определения E, определяются *сумма* $f+\varphi$, *разность* $f-\varphi$, *произведение* $f\varphi$, *частное* f/φ. Это новые функции, значения которых выражаются соответственно формулами

$$f(x)+\varphi(x), \quad f(x)-\varphi(x), \quad f(x)\varphi(x),$$
$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}, \quad \text{где} \quad x\in E;$$

здесь в случае частного предполагается, что $\varphi(x)\neq 0$ на E.

Для обозначения функции употребляются и любые другие буквы: F, Φ, Ψ, ..., так же как вместо x, y можно писать z, u, v, w, ...

§ 1.5. Задание функции формулой

Возможны различные способы задания функции. Среди них особенно важное значение имеет задание функции при помощи формулы.

Приведем несколько примеров функций, заданных формулами.

Постоянная функция

$$y=c \quad (-\infty<x<+\infty).$$

Каждому действительному x соответствует одно и то же значение y, равное числу c.

Степенная функция

$$y=x^n \quad (-\infty<x<+\infty, \quad n=1, 2, 3, \ldots).$$

При различных значениях n получим $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$ и т. д.

Линейная функция

$$y=kx+b.$$

Линейные функции встречаются в приложениях очень часто Многие физические законы выражаются, и притом достаточно точно, линейными функциями. Например, длина l стержня с хорошим приближением рассматривается как линейная функция его температуры t:

$$l = l_0 + \alpha t,$$

где α — коэффициент линейного расширения, l_0 — длина стержня при $t = 0$. Если x — время, а y — путь, пройденный за это время точкой, то линейная функция $y = kx + b$ выражает тот факт, что точка движется равномерно со скоростью k, число же b есть расстояние точки от начала отсчета пути в момент времени $x = 0$. Возможность приближенно считать равномерными различные изменения хотя бы на малых участках и простота линейной функции делают ее очень употребительной.

Частным случаем линейной функции (при $b = 0$) является *прямая пропорциональность*

$$y = kx, \qquad k \neq 0.$$

Функция второй степени

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

тоже встречается в приложениях, например, при описании равномерного ускоренного движения.

Можно рассматривать функции третьей, четвертой и вообще n-й степени. Функция

$$y = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 1 \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

есть пример функции четвертой степени.

Функция n-й степени, или, как ее называют, многочлен n-й степени, получается из заданных постоянных и степенной функции $y = x$ при помощи действий сложения, вычитания и умножения, взятых в конечном числе. Если прибавить к этим действиям еще деление, то будем получать так называемые *рациональные функции*. Вот примеры рациональных функций:

$$y = \frac{-6}{x}, \qquad y = \frac{1+x}{1-x}, \qquad y = \frac{1+x^2}{x^2-5x+6}.$$

Рациональную функцию всегда можно записать в виде дроби, у которой числитель и знаменатель — многочлены. Рациональная функция определена для всех действительных x, которые не обращают знаменатель в нуль

Частным случаем рациональной функции является *функция, выражающая обратную пропорциональность*

$$y=\frac{k}{x} \qquad (x\neq 0).$$

Функция на различных частях ее области определения может быть задана различными формулами. Например, пусть поезд, вышедший из пункта A в момент $t=0$, шел в течение двух часов со скоростью 100 км/ч и, прибыв в пункт B, стоял там один час, а затем шел дальше в течение трех часов со скоростью 80 км/ч. Тогда функция $s=f(t)$, выражающая расстояние (в километрах) поезда от A в момент времени t, очевидно будет определяться следующими тремя формулами:

$$f(t)=\begin{cases} 100t, & 0\leqslant t<2,\\ 200, & 2\leqslant t<3,\\ 80t-40, & 3\leqslant t\leqslant 6. \end{cases} \tag{3}$$

В дальнейшем мы остановимся достаточно подробно на тригонометрических функциях и введем новые функции — показательную и логарифмическую.

§ 1.6. Задание функции графиком

Важным средством задания функции является график. Зададим прямоугольную (декартову) систему координат xOy (рис. 1), на оси x отметим отрезок $[a, b]$ и изобра-

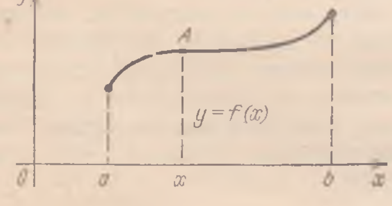


Рис. 1

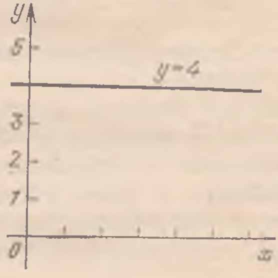


Рис. 2

зим любую кривую Г, обладающую следующим свойством: какова бы ни была точка x отрезка, прямая, проходящая через нее параллельно оси y, пересекает кривую Г в единственной точке A. Такую кривую Г мы будем называть *графиком*. График определяет функцию $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ следующим образом. Если x есть произвольная точка отрезка $[a, b]$, то соответствующее значение $y=f(x)$ определяется как ордината точки A (см. рис. 1). Следовательно, с помощью графика дается вполне определенный закон соответствия между x и $y=f(x)$.

Графиком функции $y=c$ является прямая, параллельная оси x и пересекающая ось y в точке $(0; c)$. На рис. 2 изображен график функции $y=4$.

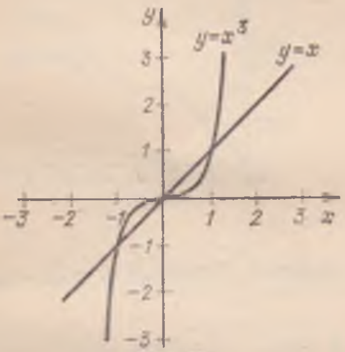


Рис. 3

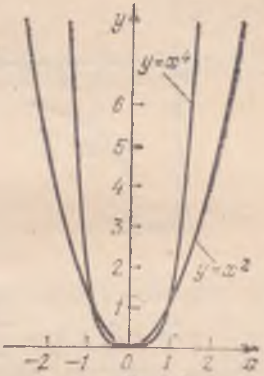


Рис. 4

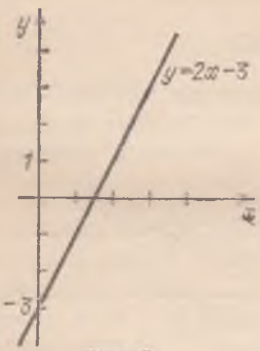


Рис. 5

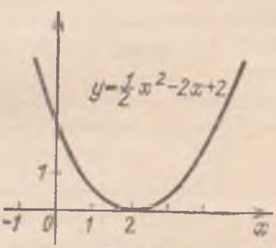


Рис. 6

Графики степенной функции для $n=1, 2, 3, 4$ изображены на рис. 3 и 4.

Графиком линейной функции $y=kx+b$ является прямая, образующая с положительным направлением оси x угол, тангенс которого равен k, и пересекающая ось y в точке, ордината которой равна b.

Графиком функции второй степени $y=ax^2+bx+c$ является парабола.

Графиком обратной пропорциональности является гипербола.

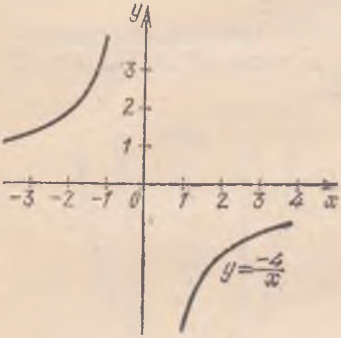


Рис. 7

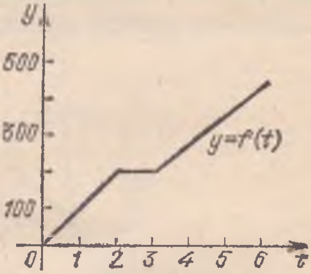


Рис. 8

На рис. 5—7 приведены графики функций $y=2x-3$, $y=\frac{1}{2}x^2-2x+2$ и $y=\frac{-4}{x}$.

График функции, заданный формулами (3), изображен на рис. 8.

§ 1.7. Задание функции таблицей

Функция может быть задана с помощью таблицы. Пусть, например, результаты измерения температуры воздуха T в момент времени $t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 10$ часов занесены в таблицу:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	2	1,5	1	1	0,5	1	1,5	2	3	4	6

Таким образом, мы получили функцию $T=f(t)$, определенную на множестве E целых чисел от 0 до 10, заданную таблицей. График функции $T=f(t)$, состоящий из 12 точек, изображен на рис. 9.

Используя приведенную таблицу и учитывая, что температура T изменялась непрерывно, можно рассмотреть

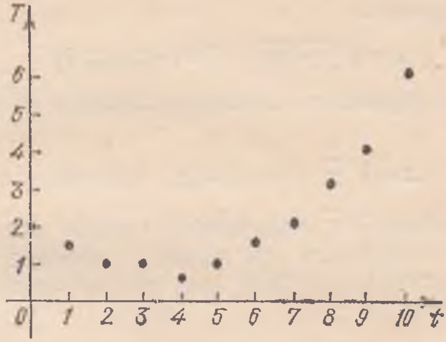


Рис. 9

функцию $T=f(t)$ на множестве $[0,\ 10]$. Ее график может быть получен из первого лишь приближенно, плавным соединением его точек.

§ 1.8. Сложная функция

С помощью арифметических действий можно конструировать по данным функциям новые функции. Но существует еще и другое средство конструирования функции по данным функциям. Мы имеем в виду операцию *функции от функции.*

Пусть заданы две функции $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, где G есть область определения f, а E — область определения φ, и пусть каждому x из E соответствует при помощи функции φ значение u, принадлежащее G. Тогда можно сконструировать сложную функцию $y=f(\varphi(x))$ от x с областью определения E. Ее называют также *функцией от функции.*

Например, функцию

$$y=(x^2+1)^3 \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

можно рассматривать как сложную функцию

$$y=u^3, \quad u=x^2+1 \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

определенную для всех точек x или, как говорят, определенную на интервале $(-\infty,\ +\infty)$.

Возможна сложная функция, в образовании которой участвует n функций:

$$z=F_1(F_2(F_3(\ldots(F_n(x))\ldots))).$$

Например, функция

$$z=\sqrt{1-x^2} \quad (-1\leqslant x\leqslant 1) \tag{4}$$

есть сложная функция, сконструированная из трех функций:

$$z=\sqrt{u}, \quad u=1-y, \quad y=x^2.$$

Так как функция $\sqrt{u}$ определена только для $u\geqslant 0$, то функция (4) определена для таких x, которые удовлетворяют неравенству $1-x^2\geqslant 0$ или, что все равно, неравенствам $-1\leqslant x\leqslant 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое
1) функция,
2) область задания функции,
3) постоянная функция,
4) линейная функция,
5) степенная функция,
6) многочлен второй степени,
7) многочлен n-й степени,
8) рациональная функция,
9) сложная функция?

2. Нарисуйте схематические графики функций x^2, x^3, x^4, $\frac{1}{x}$.

3. Укажите области определения функций

1) $\frac{1}{x-1}$, 2) $\sqrt{x}$, 3) $\sqrt[3]{x}$.

4. По цепочкам функций написать соответствующую сложную функцию и указать область ее задания:

1) $y=\sqrt{v}, \quad v=1+u, \quad u=x^2$;

2) $y=\sqrt{v}, \quad v=1-u, \quad u=x^2$;

3) $y=\frac{1}{v}, \quad v=1+\sqrt{u}, \quad u=1-x$.

§ 1.9. Свойства некоторых функций

Функция $f(x)$ называется *четной*, если выполняется равенство

$$f(-x)=f(x)$$

для всех значений x из области ее определения.

Например, функция x^2 четная, потому, что $(-x)^2=x^2$ для всех x. Вообще любая функция вида x^n, где n — четное число, четная. Ведь для четного n выполняется равенство

$$(-x)^n=x^n,$$

каково бы ни было x.

График четной функции $y=f(x)$ симметричен относительно оси y, потому что при условии $f(-x)=f(x)$ точки графика $(x, f(x))$ и $(-x, f(-x))$ симметричны относительно оси y. На рис. 4 изображены графики четных функций $y=x^2$ и $y=x^4$.

Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если выполняется равенство

$$f(-x)=-f(x)$$

для всех значений x из области ее определения.

Например, функция x^3 нечетная, потому что $(-x)^3=-x^3$ для всех x. Вообще функция x^n при нечетном n нечетные, а при четном n — четные.

График нечетной функции $y=f(x)$ симметричен относительно начала координат, потому что при условии $f(-x)=-f(x)$ точки $(x, f(x))$ и $(-x, f(-x))$ симметричны относительно начала координат. На рис. 3 изображены графики нечетных функций $y=x$ и $y=x^3$.

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке значений x, если бо́льшему значению x из этого промежутка соответствует бо́льшее значение y.

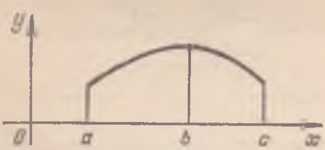


Рис. 10

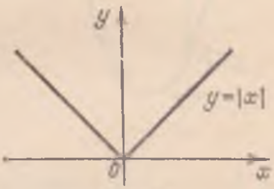


Рис. 11

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на промежутке, если бо́льшему значению x из этого промежутка соответствует меньшее значение y.

Следовательно, если точки x_1 и x_2 принадлежат промежутку и $x_1<x_2$, то в случае возрастающей функции $f(x_1)<f(x_2)$ и в случае убывающей функции $f(x_1)>f(x_2)$.

На рис. 10 изображен график функции, возрастающей на $[a, b]$ и убывающей на $[b, c]$.

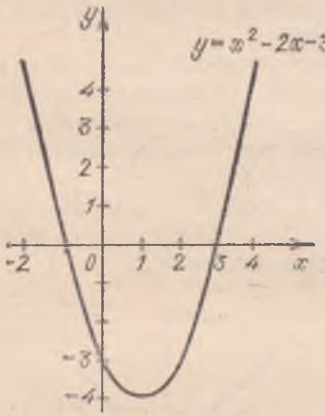
Функция $y = x^n$ при нечетном n возрастает на всей действительной оси $(-\infty, \infty)$; при четном же n она возрастает только на $[0, \infty)$ и убывает на $(-\infty, 0]$ (см. рис. 3 и 4).

График функции $|f(x)|$ совпадает с графиком $f(x)$ там, где $f(x) > 0$, и симметричен ему относительно оси x там, где $f(x) < 0$. На рис. 11 изображен график функции $y = |x|$:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{для} \quad x > 0, \\ 0 & \text{для} \quad x = 0, \\ -x & \text{для} \quad x < 0. \end{cases}$$

На рис. 12 приведены графики функций $x^2 - 2x - 3$ и $|x^2 - 2x - 3|$.

График функции $f(x + \alpha)$, где α — заданное число, получается сдвигом графика $f(x)$ влево на величину α. При



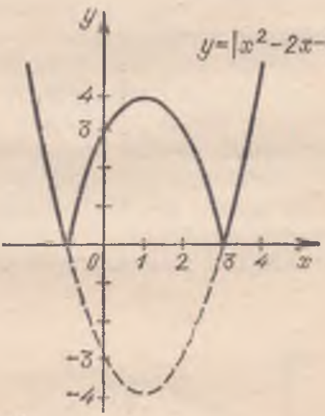


Рис. 12

$\alpha < 0$ на самом деле это есть сдвиг на величину $|\alpha|$ вправо. На рис 13 изображен график функции $|x - 2|$.

На рис. 14 изображен график функции $y = \dfrac{-3x - 2}{x + 2}$. Так как

$$y = \frac{-3(x+2) + 4}{x+2} = -3 + \frac{4}{x+2},$$

то график этой функции можно получить следующим образом. В системе координат xOy задан пунктиром график функции $\frac{4}{x}$. Сдвигая его (мысленно) влево на величину 2, получим график функции $\frac{4}{x+2}$. Опуская последний вниз на величину 3, получим искомый график функции $-3+\frac{4}{x+2}$.

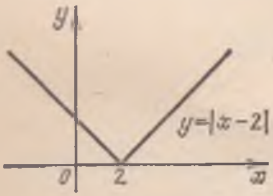


Рис. 13

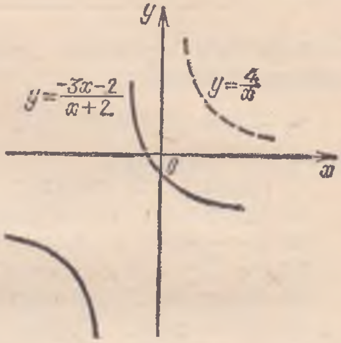


Рис. 14

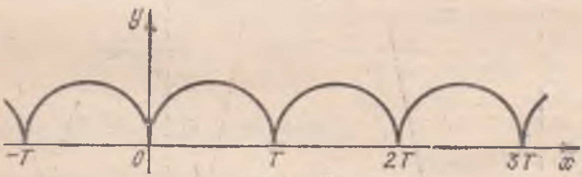


Рис. 15

Функция $f(x)$ называется *периодической* с периодом T $(T > 0)$, если выполняется равенство

$$f(x+T)=f(x)$$

для всех x. Чтобы изобразить график этой функции, надо нарисовать его для отрезка $[0, T)$, а затем продолжить его периодически на всю действительную ось (рис. 15).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Запишите множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам (см. п. 1.2)

1) $a \leqslant x < b$; 2) $a < x \leqslant b$; 3) $-\infty < x \leqslant b$;
4) $a \leqslant x < \infty$.

2. Что называется функцией?

3. Функция $y=f(x)$ задана таблицей

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Задайте эту функцию графиком. Его точки соедините плавной кривой.

4. Даны функции $f(x)=\frac{1}{x}$ и $\varphi(x)=x^2+3x$. Задайте формулой функцию

1) $f(\varphi(x))$; 2) $\varphi(f(x))$; 3) $f(\varphi(f(x)))$.

5. Докажите, что функция

а) $y=-4x^2+5$ является четной,

б) $y=7x^3-3x$ является нечетной.

6. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ четные. Докажите, что функции

1) $f(x)+\varphi(x)$; 2) $f(x)\cdot\varphi(x)$; 3) $f(\varphi(x))$

являются четными. Нужна ли четность f?

7. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ нечетные. Какими (четными или нечетными) являются функции

1) $f(x)+\varphi(x)$; 2) $f(x)\cdot\varphi(x)$; 3) $f(\varphi(x))$?

Нужна ли нечетность f?

8. Какие из функций

1) $y=5x^4-4x^2+2$; 2) $y=5x^3+3x^5+x$; 3) $y=x^2+x^3$

являются нечетными?

9. Какая функция называется а) возрастающей, б) убывающей на данном числовом промежутке?

10. Докажите, что функция $y=x^2$ является

а) возрастающей на $[0, +\infty)$,

б) убывающей на $(-\infty, 0]$.

Является ли функция $y=x^n$ возрастающей на всей своей области определения?

11. Докажите, что функция $y=\frac{k}{x}$ является

а) возрастающей при $k<0$,

б) убывающей при $k>0$ на каждом из промежутков $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

12. Постройте графики функций

1) $y=x-4$; 2) $y=|x-4|$; 3) $y=|x-4|-2$;
4) $y=||x-4|-2|$; 5) $y=(x-1)^2$; 6) $y=(|x|-1)^2$;
7) $y=(|x|-1)^2-1$; 8) $y=|(|x|-1)^2-1|$;
9) $y=x^2-6x+5$; 10) $y=x^2-6|x|+5$;
11) $y=|x^2-6x+5|$; 12) $y=|x^2-6|x|+5|$;

13) $y=\frac{2x-5}{x-3}=\frac{(2x-5)\,2}{2x-6}=\frac{(2x-6)\,2+2}{2x-6}=2+\frac{1}{x-3}$;

14) $y=\frac{3x+10}{x+2}$; 15) $y=|x-2|+|x+2|$;

16) $y=\sqrt{x}$; 17) $y=\sqrt{x+4}$; 18) $y=\sqrt{-x-4}$.

13. Найдите область определения функции:

1) $y=\frac{3}{x-2}$; 2) $y=\frac{10}{\sqrt{x+3}}$; 3) $y=\sqrt{x^2-5x}$;

4) $y=\sqrt{0{,}5x^2-2{,}5x+3}$;

5) $y=\sqrt{x^2-7x+12}+\sqrt{-x^2+8x-15}$.

14. Постройте график функции

1) $y=\frac{|x|}{x}$; 2) $y=\frac{|x-2|}{x-2}$; 3) $y=\frac{x^2-9}{x+3}$;

4) $y=|x|-x$; 5) $y=x-|x|$; 6) $y=x+2-|x+2|$.

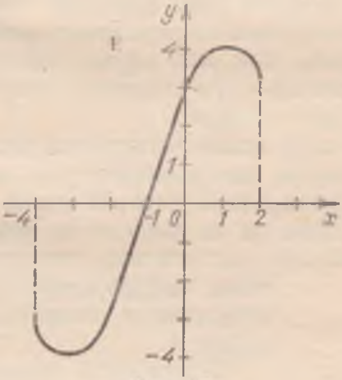


Рис. 16

15. Функция $y=f(x)$ задана своим графиком на отрезке $[-4,\ 2]$ (рис. 16). Постройте график функции

1) $y=-f(x)$; 2) $y=|f(x)|$; 3) $y=f(|x|)$;

4) $y=f(x)-|f(x)|$; 5) $y=|f(x)|-f(x)$; 6) $y=\frac{|f(x)|}{f(x)}$;

7) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$; 8) $y=f(-x)$; 9) $y=2f(x)$.

Учебное издание

НИКОЛЬСКИЙ Сергей Михайлович

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Заведующий редакцией *А. П. Баева*
Редактор *М. М. Горячая*
Художественный редактор *Л. Н. Романенкова*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *И. Я. Кришталь*

ИБ № 32830

Сдано в набор 15.09.88. Подписано к печати 11.04.89. Формат 84×108 1/32. Бумага офс. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 11,76. Усл. кр.-отт. 11,97. Уч.-изд. л. 11,1. Тираж 180 000 экз. Заказ № 9—258. Цена 35 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
МПО «Первая Образцовая типография»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
113054, Москва, Валовая, 28

Отпечатано на полиграфкомбинате ЦК ЛКСМ Украины «Молодь» ордена Трудового Красного Знамени издательско-полиграфического объединения ЦК ВЛКСМ «Молодая гвардия»: 252119, Киев-119, ул. Пархоменко, 38—44.

S. NIKOLSKII

ELEMENTS OF MATHEMATICAL ANALYSIS

This popular little book «Elements of mathematical analysis», which was issued by publishing House «Nauka» (Moscow 1981) with mass drawing, is sold off. There are its translations on english (1983) and spanish (1984) by Editorial «Mir» (Moscow).

Last time author with his colleagues was intersted to the problems of mathematical school teaching. There are their attempt textbooks in arithmetic and algebra, which now are passing experiments in the soviet schools. «Nauka» has issued «Arithmetics» (1988) by S. Nikolskii, M. Potapov, N. Reshetnikov, A. Shevkin.

Naturally author has made changes in the second edition of «Elements of mathematical analysis», using these experiences. Now every person with education for 8 classes of soviet school can read the book free. The first 8 chapters of the book contain object of algebra for 9—10 classes of soviet school.

To get this aim was introduced the chapter «Trigonometrical functions». The chapter «Exponential functions» was also changed. The definition of this function for any real numbers is a difficult question in school teaching. The author though much before to stop on the defined way of the teaching of this notion.

Style of the account of the mathematical analysis themselves is preserved as in the first edition. Notion of the limits is given on examples, without formal definitions. Generally, the properties of limits and graphics are considered on the intuitive ground. Graphics and motion themselves are serving as the ground for fundamental conclusions. Very shortly are given differential and integral calculus and their application.

The concluding chapters (9—12) are devoted to the elementary account of some additional facts which also are important for the full middle mathematical education—complex numbers, Newton's binom, combinatoric, Taylor's formula.

In the USSR this book finds oneself usefull for adult pupils and of the general and technical schools teachers and even for the students of the faculties with short mathematical programme.

We hope that this book will be usefull accordingly in the foreign countries.