ГЛАВА 3

ПРЕДЕЛ

§ 3.1. Предел последовательности

Метод пределов — это основной метод, с которым оперирует математический анализ.

Чтобы уяснить, что такое предел, начнем с классической задачи. В прямоугольной системе координат задана фигура, ограниченная параболой (рис. 65) $y=x^2$, осью x и прямой $x=1$. Требуется найти ее площадь. Вот как можно поступить.

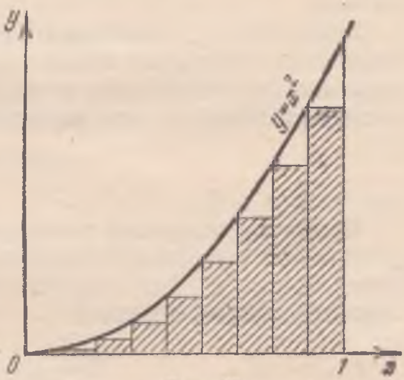

Рис. 65

Разделим отрезок $[0, 1]$ оси x на n равных частей точками

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$$

и построим на каждой из этих частей прямоугольник, левый верхний угол которого достигает параболы. Тогда получим заштрихованные на рис. 11 прямоугольники, сумма площадей которых S_n, очевидно, равна

$$S_n = 0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}=$$
$$=\frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}=\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6n^3}\ {}^{*)}.$$

---

*) Мы воспользовались формулой

$$1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6},$$

которая может быть введена следующим образом. Сложив левые и правые части равенств $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$, соответствующих значениям $k=1, 2, \ldots, n-1$, получим уравнение

$$n^3-1=3\sigma_{n-1}+\frac{3(n-1)\,n}{2}+n-1, \text{ где } \sigma_{n-1}=1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2.$$

Решив его, получим $\sigma_{n-1}=\dfrac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$.

Представим S_n в виде

$$S_n=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{3}+\alpha_n. \tag{1}$$

Величина α_n хотя и имеет сложный вид, но обладает замечательным свойством: она стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Такие величины называют *бесконечно малыми.*

Бесконечно малой называется переменная величина α_n, зависящая от натурального n, стремящаяся к нулю при неограниченном возрастании n.

Дадим формальное определение бесконечно малой величины.

Величина α_n, зависящая от натурального значения n, называется *бесконечно малой*, если, как бы ни было малое заданное положительное число ε, найдется число $N>0$ настолько большое, что выполняется неравенство

$$|\alpha_n|<\varepsilon$$

для всех $n>N$.

Сумма S_n площадей заштрихованных на рис. 65 прямоугольников есть тоже переменная величина, зависящая от натурального n. Мы показали, что она может быть записана следующим образом:

$$S=\frac{1}{3}+\alpha_n,$$

где α_n есть бесконечно малая величина. Но тогда естественно считать, что S_n стремится при неограниченном возрастании n к числу $\frac{1}{3}$, и естественно считать, что $S=\frac{1}{3}$ есть площадь рассматриваемой фигуры. Поставленная задача решена.

В ходе рассуждений мы, во-первых, дали определенные площади рассматриваемой фигуры как числа S, к которому стремится сумма S_n площадей заштрихованных на рис. 65 прямоугольников при неограниченном возрастании n, а во-вторых, нашли это число. Оказалось, что $S=\frac{1}{3}$.

Дадим определение предела. Пусть задана переменная x_n, зависящая от натурального $n=1, 2, \ldots$ Если x_n можно записать в виде суммы

$$x_n=a+a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где a — некоторое постоянное число, α_n — бесконечно малая, то говорят, что x_n *имеет своим пределом число* a *или* x_n *стремится к* a, и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

или

$$x_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Приведем примеры переменных величин, зависящих от натурального n:

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = -\frac{1}{n}, \quad z_n = \frac{(-1)^n}{n},$$

$$u_n = q^n, \quad 0 < q < 1, \quad v_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n},$$

$$w_n = (-1)^n, \quad \beta_n = a.$$

Переменные x_n, y_n, z_n и u_n — бесконечно малые; x_n и u_n стремятся к нулю, принимая положительные значения, убывая; y_n стремится к нулю, принимая отрицательные значения, возрастая; а z_n стремится к нулю, колеблясь. Величина v_n стремится к 1 $\left(\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1\right)$.

Переменная β_n есть на самом деле постоянная, равная для любого n одному и тому же числу a ($\lim \beta_n = a$). Что же касается величины w_n, то она ни к какому пределу не стремится, принимая последовательно значения $+1$ и -1.

Очевидно, если α_n есть бесконечно малая, то ее предел равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Пример.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите пределы переменных, представляя их как сумму постоянной и бесконечно малой:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-3}{n^3}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1}$.

§ 3.2. Бесконечно большая величина

Антиподами бесконечно малых величин являются бесконечно большие величины.

Переменная x_n называется *бесконечно большой*, если, как бы ни было велико число $M > 0$, найдется такое N, что $|x_n| > M$ для всех $n > N$.

Если x_n бесконечно большая, то пишут

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty \quad \text{или} \quad x_n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Может случиться, что бесконечно большая величина x_n начиная с некоторого n становится положительной; тогда пишут

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty,$$

или отрицательной, тогда пишут

$$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty.$$

Вот примеры бесконечно больших величин:

$$x_n = n, \quad y_n = -n, \quad z_n = (-1)^n n, \quad u_n = n^2,$$
$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \to \infty} u_n = +\infty, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = -\infty.$$

Что же касается величины z_n, то про нее можно написать

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \infty,$$

но здесь нельзя символ ∞ заменить ни символом $+\infty$, ни символом $-\infty$. Впрочем, мы часто будем писать ∞ вместо $+\infty$, если нет опасности недоразумений.

§ 3.3. Действия с пределами

Переменные x_n и y_n можно складывать, вычитать, умножать и делить, образуя величины

$$x_n + y_n, \quad x_n - y_n, \quad x_n y_n, \quad \frac{x_n}{y_n}.$$

В случае частного надо предполагать, что $y_n \neq 0$ для любых $n = 1, 2, 3, \ldots$

Справедливы следующие, в сущности очевидные, свойства пределов:

$$\lim_{n \to \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n \pm \lim_{n \to \infty} y_n,$$
$$\lim_{n \to \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n \lim_{n \to \infty} y_n, \tag{2}$$

в частности, если $x_n = c$ постоянная, то

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = \lim_{n\to\infty} c \lim_{n\to\infty} x_n = c \lim_{n\to\infty} x_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \qquad \left(\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0\right).$$

Эти свойства надо понимать в том смысле, что если существуют пределы, фигурирующие в правых частях равенств (2), то автоматически существуют пределы в левых частях соответствующих равенств и справедливы сами равенства.

Добавим еще, что

$$\lim_{x_n\to\infty}\frac{1}{x_n} = 0,$$

$$\lim_{\substack{x_n\to A\neq 0\\ y_n\to\infty}}(x_n y_n) = \infty, \qquad \lim_{\substack{x_n\to 0\\ x_n\neq 0}}\frac{1}{x_n} = \infty. \tag{3}$$

Более сложный вопрос возникает при вычислении предела частного $\frac{x_n}{y_n}$, когда и $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$ или если $x_n \to \infty$ и $y_n \to \infty$. В таких случаях заранее невозможно сказать, чему равен предел. В зависимости от индивидуальных свойств переменных x_n и y_n предел может быть любым конечным или бесконечным числом *). Может также случиться, что отношение $\frac{x_n}{y_n}$ не имеет никакого предела, даже бесконечного.

Например, пусть $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$; тогда, очевидно, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{n^2}{n} = n \to +\infty, \qquad \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Если же $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, то отношение $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ ни к какому пределу не стремится.

Мы рассматривали переменные x_n, зависящие от натурального n ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Такие переменные называют *последовательностями*.

---

*) Символы $+\infty$, $-\infty$, ∞ удобно называть бесконечными числами, хотя это вовсе не числа, и тогда обычные числа называют конечными числами.

Пример 1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1}=1.$$

Пояснение. У дроби $\frac{n+3}{n+1}$ как числитель, так и знаменатель стремится к бесконечности, и непосредственно нельзя сказать, к какому пределу она стремится. Однако после деления числителя и знаменателя на n обнаружилось, что числитель стремится к 1 и знаменатель стремится к 1. Это дает возможность воспользоваться формулой о пределе частного.

Пример 2.

$$\lim_{n\to\infty}(n^4-100n^3-2n^2+1)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[n^4\left(1-\frac{100}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)\right]=+\infty.$$

Пояснение. Сразу неясно, к чему стремится исходное выражение: первый член n^4 стремится к $+\infty$, а член $-100n^3-2n^2$ стремится к $-\infty$. Но после вынесения за скобки n^4 все проясняется: множитель $n^4\to+\infty$, а $\left(1-\frac{100}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)\to 1\neq 0$. Но тогда произведение стремится к ∞ и даже к $+\infty$ (см. (3)).

Пример 3.

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n})=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{n+2})^3-(\sqrt[3]{n})^3}{(\sqrt[3]{n+2})^2+\sqrt[3]{n+2}\,\sqrt[3]{n}+(\sqrt[3]{n})^2}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(\sqrt[3]{n+2})^2+\sqrt[3]{n+2}\,\sqrt[3]{n}+(\sqrt[3]{n})^2}=0,$$

потому что знаменатель последней дроби стремится к ∞.

Нет общего способа вычисления предела разности двух переменных, каждая из которых стремится к $+\infty$. В каждом конкретном случае приходится придумывать свой способ.

Пример 4. Сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем q $(q\neq 1)$ и первым членом 1 равна

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - q^n \frac{1}{1-q}. \tag{4}$$

Если прогрессия убывающая, т. е. если $|q| < 1$, то второй член правой части (4) стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$-q^n \frac{1}{1-q} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Поэтому существует предел

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1),$$

который называют *суммой ряда*

$$1 + q + q^2 + \ldots \tag{5}$$

(состоящего из бесконечного числа членов!), и при этом пишут

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots,$$

т. е. приписывают выражению (5) число, равное сумме ряда. В этом случае говорят, что *ряд* (5) *сходится.*

Если $|q| > 1$, то

$$q^n \frac{1}{1-q} \to \infty \quad (n \to \infty);$$

при $q = 1$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = 1 + \ldots + 1 = n \to \infty.$$

Если же $q = -1$, то

$$S_2 = 0, \quad S_3 = 1, \quad S_4 = 0, \quad S_5 = 1, \ \ldots$$

и S_n не стремится к пределу.

Из сказанного следует, что если условие $|q| < 1$ не выполняется, то S_n не стремится к конечному пределу при $n \to \infty$. В этом случае говорят, что ряд (5) расходится. Ему не приписывают никакого числа.

Замечание. Следует обратить внимание на свойства переменных, имеющих предел (конечный и бесконечный), выраженные формулами (2). Надо знать также, что переменная, имеющая предел, равный a, есть сумма $a + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая. О самом же понятии бесконечно малой для наших целей достаточно иметь чисто интуитивное представление, выясненное на примерах.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Приведите примеры бесконечно малых x_n, зависящих от натурального $n=1, 2, \ldots$

2. Что значит, что переменная x_n $(n=1, 2, \ldots)$ имеет предел, равный числу a? Приведите примеры.

3. Каким свойством обладает переменная x_n, называемая бесконечно большой? Приведите примеры.

4. Что значит $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$? Приведите примеры.

5. По каким правилам вычисляют пределы суммы, разности, произведения и частного переменных x_n и y_n?

6. Что называется суммой убывающей геометрической прогрессии?

7. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n-1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-3n^2+1}{n^5-100n-5}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n}{n^2-1}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n^3+n}$;

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^3-10n^2+2n-1)$; 6) $\lim\limits_{n\to-\infty} (n^3-10n^2+2n-1)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3-10n^2+1}$.

§ 3.4. Предел $\dfrac{\sin x}{x}$

Рассмотрим функцию (рис. 66)

$$y=\frac{\sin x}{x}.$$

Она определена для всех значений x, за исключением $x=0$. Посмотрим, как изменяется эта функция, когда x

Рис. 66

приближается к нулю все ближе и ближе, оставаясь отличным от нуля. Вот таблица:

x	0,50	0,10	0,05
$\frac{\sin x}{x}$	0,9589	0,9983	0,9996

Таблица наводит на мысль, что когда независимая переменная x приближается к 0, оставаясь положительной, функция приближается к 1. Этот факт можно получить из геометрических соображений. На рис. 67 изображена окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Пусть $\smile AC = \alpha$. Тогда $AB = \sin\alpha$, $AD = \operatorname{tg}\alpha$.

Но тогда, как видно из рисунка (длина дуги окружности больше стягиваемой ею хорды и меньше объемлющей ее ломаной),

$$2AB < 2(\smile AC) < 2AD.$$

Поэтому

$$2\sin\alpha < 2\alpha < 2\operatorname{tg}\alpha,$$

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1.$$

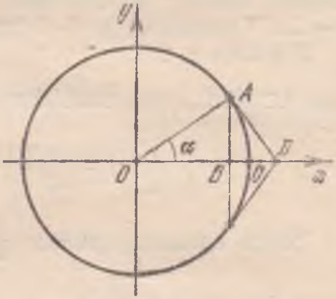

Рис. 67

Если теперь α приближать (стремить) к 0, то функция $\cos\alpha$, как это видно из графика (см. рис. 67), будет приближаться к 1. Но функция $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ находится все время между $\cos\alpha$ и 1. Это показывает, что она стремится к 1, когда α стремится к нулю, оставаясь положительной. Этот факт записывают так:

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1, \tag{6'}$$

и говорят, что *предел функции* $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, *когда α стремится к нулю, принимая положительные значения, равен* 1.

Но если $\alpha \to 0$, принимая отрицательные значения, то указанный предел все равно существует и равен 1. Это получается из (6′) посредством замены переменной $\alpha = -t$, в силу которой, если $\alpha \to 0$, $\alpha < 0$, то $t \to 0$, $t > 0$:

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha < 0}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha < 0}} \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\sin t}{t} = 1. \tag{6''}$$

Равенства (6′) и (6″) объединяют в одно:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1, \tag{6}$$

и говорят, что *предел* $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ *при* $\alpha \to 0$ *равен* 1.

Пример 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y/2} = \lim_{y \to 0} \left(2 \frac{\sin y}{y}\right) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Чтобы свести вычисление этого предела к пределу (6), делаем замену переменной x на y при помощи равенства $y = 2x$. Очевидно, $y \to 0$ при $x \to 0$.

Пример 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 (x/2)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 (x/2)}{2 (x/2)^2} =$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin (x/2)}{x/2}\right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{y \to 0} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

Здесь сделана замена $\frac{x}{2} = y$, где $y \to 0$ при $x \to 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x}$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$; д) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2}$.

2. Повторите вывод формулы (6) и запомните эту формулу.

§ 3.5. Предел функции

Рассмотрим произвольную функцию $y = f(x)$. Пусть она определена в некоторой *правой окрестности точки* a, за исключением, быть может, самой точки a. Это значит, что она определена для значений x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < a + \delta$, где δ — некоторое положительное число.

Говорят, что *функция* $y=f(x)$ *имеет правый предел в точке* a, *равный* A, если из того, что x приближается (стремится) к a, оставаясь в правой окрестности точки a, следует, что $f(x)$ приближается к A. Это записывают так:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = A.$$

Аналогично, если функция $y=f(x)$ определена в левой окрестности точки a, за исключением, быть может, точки a, т. е. она задана для значений x, удовлетворяющих неравенствам $a-\delta < x < a$ $(\delta > 0)$ при некотором $\delta > 0$, то говорят, что она *имеет левый предел в точке* a, равный числу B, если из того, что x приближается к a, оставаясь в левой окрестности a, следует, что $f(x)$ приближается (стремится) к B. Этот факт записывают так:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = B.$$

Если существуют левый и правый пределы функции $y=f(x)$ в точке a и они равны одному и тому же числу A, то говорят, что функция *имеет предел в точке* a, *равный* A, и пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

В этом случае само собой разумеется, что функция f определена в некоторой полной окрестности $a-\delta < x < a+\delta$ точки a за исключением, быть может, самой точки a.

Функция $y=\frac{\sin x}{x}$, которую мы рассмотрели выше, определена для всех значений x, за исключением $x=0$. Мы уже знаем, что эта функция имеет предел при $x \to 0$, равный 1.

Формально выражение «при x, стремящемся к a, функция $f(x)$ стремится к A» надо понимать следующим образом: для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(x)-A| < \varepsilon$$

для всех x, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < |x-a| < \delta.$$

О функции $f(x)$ говорят, что она *стремится к* ∞ *при* $x \to a$, если для значений x, достаточно близких к a, она может сделаться по абсолютный величине больше как угодно большого числа $M > 0$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Можно при этом говорить о правом и левом пределе в точке a и заменять символ ∞ на $+\infty$ или $-\infty$, если функция вблизи a положительна или, соответственно, отрицательна.

Например, мы знаем, что

$$\lim_{x \to \pi/2} \operatorname{tg} x = \infty \tag{7}$$

и, что точнее (см. рис. 42),

$$\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ x < \pi/2}} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ x > \pi/2}} \operatorname{tg} x = -\infty. \tag{7'}$$

Заметим, наконец, что в этих определениях конечное число a (точку числовой прямой) можно заменить на символ ∞, или $+\infty$, или $-\infty$.

Вспомним, что функция $y = \operatorname{arctg} x$ задана для всех значений x, т. е. на интервале $-\infty < x < \infty$. Для нее справедливы равенства (см. § 2.11 рис. 61)

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2, \quad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2.$$

§ 3.6. Действия с пределами функций

Так же как для пределов переменных, пробегающих последовательности, для пределов функций имеют место аналогичные свойства:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} \varphi(x), \tag{8}$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} \varphi(x), \tag{9}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)} \quad \left(\lim_{x \to a} \varphi(x) \neq 0\right). \tag{10}$$

В частности, если $f(x)$ есть постоянная ($f(x) = c$), и, следовательно, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, то

$$\lim_{x \to a} [c\varphi(x)] = c \lim_{x \to a} \varphi(x). \tag{11}$$

Эти свойства снова надо понимать в том смысле, что если существуют конечные пределы в правых частях равенств

(8)—(11), то автоматически существуют пределы в левых частях этих равенств и выполняются сами равенства.

Верны также свойства ($f(x) \neq 0$):

если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$;

если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

Замечание. В приведенных равенствах a может быть не только конечным, но и бесконечным, т. е. может быть $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ или $x \to \infty$.

Пример 1.

$$\lim_{x\to x_0}(ax^2+bx+c) = \lim_{x\to x_0}(ax^2) + \lim_{x\to x_0}(bx) + \lim_{x\to x_0} c =$$
$$= a\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^2 + b\lim_{x\to x_0} x + c = ax_0^2 + bx_0 + c$$

при x_0 конечном.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)} = \frac{4+4}{2+2} = 2.$$

В этих примерах, чтобы вычислить предел функции при $x \to a$, достаточно подставить в нее $x = a$. В частности, в примере 2 это можно сделать потому, что как числитель, так и знаменатель стремятся к конечным пределам и при этом предел знаменателя не равен нулю.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+2}{x-3} = \infty$.

Здесь нельзя применить свойство (10), выражающее, что предел частного равен частному пределов, потому что предел знаменателя равен нулю. С другой стороны, надо считать очевидным, что *если числитель дроби стремится к конечному числу, не равному нулю, а знаменатель стремится к нулю, то дробь стремится к бесконечности.*

Пример 4. Требуется вычислить предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

Решение. В данном случае числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю и соображения, приведенные в примере 3, тоже неприменимы. Но вот как можно поступить. Для любого $x \neq 2$ имеем $\frac{x^2-4}{x-2} = x+2$, а так как при определении предела при $x \to 2$ совсем не принимается во внимание значение f в точке $x=2$, то

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2).$$

Таким образом, вместо того чтобы вычислять предел более сложной функции $\frac{(x^2-4)}{(x-2)}$, достаточно вычислить предел более простой функции $x+2$. Последний при $x\to 2$, очевидно, равен 4. Ведь

$$\lim_{x\to 2}(x+2)=\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}2=2+2=4.$$

Вычисления, связанные с нахождением данного предела, обычно располагают следующим образом:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=\lim_{x\to 2}x+2=4.$$

Подчеркнем, что функции $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ и $\varphi(x)=x+2$ являются разными функциями. Первая из них определена

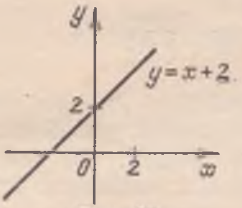

Рис. 68

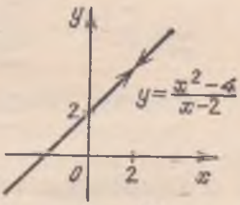

Рис. 69

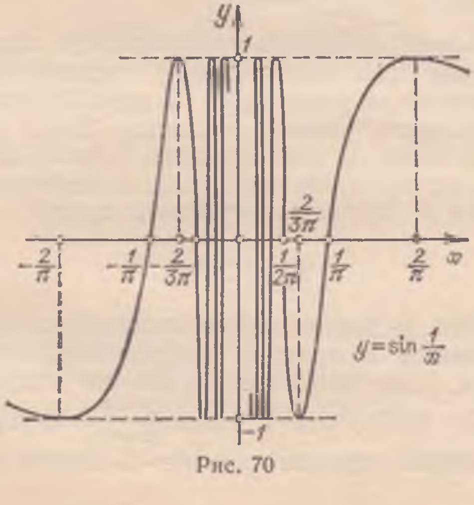

Рис. 70

для $x \neq 2$, в то время как вторая определена для всех x. Однако при вычислении предела функции при $x \to 2$ нас совершенно не интересует, определены или не определены эти функции в самой точке $x=2$, и так как $f(x)=\varphi(x)$ для $x \neq 2$, то (рис. 68 и 69)

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \varphi(x) = \varphi(2).$$

Пример 5. Функция $y=\sin\frac{1}{x}$ (график ее изображен на рис. 70) определена для всех значений $x \neq 0$. Она определена, таким образом, в окрестности точки $x=0$ за исключением самой точки $x=0$. Эта функция не имеет предела при $x \longrightarrow 0$, потому что последовательность отличных от нуля значений $x_k=\frac{2}{\pi(2k+1)}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ стремится к нулю, и в то же время $f(x_k)=(-1)^k$ не стремится при $k \longrightarrow \infty$ ни к какому пределу.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Сформулируйте утверждения о пределе суммы, разности, произведения и частного функций.

2. Что значит, что функция стремится

а) к ∞, б) к $+\infty$, в) к $-\infty$

при $x \to a$?

3. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\operatorname{ctg} x$; 5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\operatorname{ctg} x$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-1}{x-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^3-20x^2+1)$; 8) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^3-20x^2+1)$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$; 10) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})$.

§ 3.7. Непрерывность функции

На рис. 71 изображен график функции $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Его естественно назвать *непрерывным* графиком, потому что он может быть нарисован одним непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги. Зададим произвольную точку (число) x отрезка $[a, b]$. Близкая к ней другая точка x' отрезка $[a, b]$ может быть записана в виде $x'=x+\Delta x$, где Δx есть число положительное или отрицательное, называемое *приращением* x.

Разность

$$\Delta f = \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

называется *приращением функции* f в точке x, соответствующим приращению Δx. На рис. 71 Δy равно длине отрезка BC.

Будем стремить Δx непрерывно к нулю; тогда для рассматриваемой функции, очевидно, и Δy будет стремиться к нулю:

$$\Delta y \to 0 \quad (\Delta x \to 0). \tag{12}$$

Рассмотрим теперь график функции $F(x)$, изображенный на рис. 72. Он состоит из двух непрерывных кусков

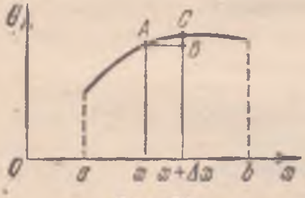

Рис. 71

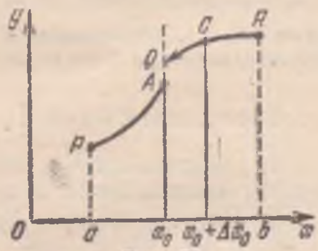

Рис. 72

PA и QR. Однако эти куски не соединены непрерывно, и потому график естественно назвать *разрывным*. В точке x_0 нам надо как-то определить нашу функцию; условимся, что $F(x_0)$ равно длине отрезка, соединяющего A и x_0; в знак этого точка A изображена на графике жирно, в то время как у точки Q нарисована стрелка, указывающая, что Q не принадлежит графику. Если бы точка Q принадлежала графику, то функция f была бы двузначной в точке x_0.

Придадим теперь x_0 приращение Δx_0 и определим соответствующее приращение функции:

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x_0) - F(x_0).$$

Если мы будем Δx_0 стремить непрерывно к нулю, то теперь уже нельзя сказать, что ΔF будет стремиться к нулю. Для отрицательных Δx_0, стремящихся к нулю, это так, но для положительных вовсе не так: из рисунка видно, что если Δx_0, оставаясь положительным, стремится к нулю, то соответствующее приращение ΔF при этом стремится к положительному числу, равному длине отрезка AQ.

После этих рассмотрений естественно ввести следующее определение. Функция f, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *непрерывной в точке x этого отрезка*, если приращение ее в этой точке, соответствующее приращению Δx *), стремится к нулю при любом способе стремления Δx к нулю при $\Delta x > 0$ и $\Delta x < 0$. Это свойство (непрерывности в x) записывается в виде соотношения (12) или еще так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{13}$$

Запись (13) читается так: предел Δy равен нулю, когда Δx стремится к нулю по любому закону. Впрочем, выражение «по любому закону» обычно опускают, подразумевая его. В частности, Δx может пробегать любую стремящуюся к нулю последовательность, значения которой могут быть как положительными, так и отрицательными.

Если определенная на отрезке $[a, b]$ функция f не является непрерывной в точке x этого отрезка, т. е. в этой точке для нее не выполняется свойство (13) хотя бы при одном способе стремления Δx к нулю, то она называется *разрывной в точке x*.

Функция, изображенная на рис. 71, непрерывна в любой точке x отрезка $[a, b]$, функция же, изображенная на рис. 72, очевидно, непрерывна в любой точке x отрезка $[a, b]$ за исключением точки x_0, потому что для последней соотношение (13) не выполняется, когда $\Delta x_0 \to 0$, оставаясь положительным.

Функция, непрерывная в любой точке отрезка (интервала), называется *непрерывной на нем*.

Непрерывная функция математически выражает свойство, с которым нам приходится часто встречаться на практике, заключающееся в том, что малому приращению независимой переменной соответствует малое же приращение зависимой от нее переменной (функции).

Прекрасными примерами непрерывной функции могут служить различные законы движения тел $s = f(t)$, выражающие зависимости пути s, пройденного телом, от времени t. Время и пространство непрерывны, при этом тот или иной закон движения $s = f(t)$ устанавливает между ними определенную непрерывную связь, характеризую-

*) Здесь имеется в виду Δx такое, что $x + \Delta x$ принадлежит $[a, b]$.

щуюся тем, что малому приращению времени соответствует малое приращение пути.

К абстракции непрерывности человек пришел, наблюдая окружающие его так называемые сплошные среды — твердые, жидкие или газообразные, например металлы, воду, воздух. На самом деле всякая физическая среда представляет собой скопление большого числа отделенных друг от друга движущихся частиц. Однако эти частицы и расстояния между ними настолько малы по сравнению с объемами сред, с которыми приходится иметь дело в макроскопических физических явлениях, что многие такие явления можно достаточно хорошо изучать, если считать приближенно массу изучаемой среды непрерывно распределенной, без всяких просветов в занятом ею пространстве. На таком допущении базируются многие физические дисциплины, например гидродинамика, аэродинамика, теория упругости. Математическое понятие непрерывности, естественно, играет в этих дисциплинах, как и во многих других, большую роль.

Из (12) следует

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} [f(x_0) + (f(x) - f(x_0))] =$$
$$= \lim_{x\to x_0} f(x_0) + \lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = f(x_0) + 0 = f(x_0),$$

и мы получили равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{14}$$

которое может служить другим эквивалентным определением непрерывности f в точке x_0: *если функция f непрерывна в точке x_0, то она должна быть определена в окрестности этой точки, в том числе в самой точке x_0, должен существовать предел f в точке x_0 и должно выполняться равенство* (14).

Равенство (14) можно еще записать так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right). \tag{15}$$

Говорят, что если функция f непрерывна в точке x_0, то «предел $f(x)$ при $x \to x_0$ равен f от $\lim x$», или еще говорят, что в этом случае символы f и $\lim$ перестановочны.

§ 3.8. Элементарные функции

Функции x^p, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и функции a^x и $\lg_a x$, которые рассматриваются в следующей главе, называются *простейшими элементарными функциями*. Они непрерывны на областях их определения (интервалах или отрезках). Это надо учитывать при вычислении пределов этих функций. Справедливы, например, равенства:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n \quad (n=1, 2, \ldots, -\infty < x_0 < \infty)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} x^p = x_0^p \quad (p \neq 0,\ 0 < x_0 < \infty)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ -\infty < x_0 < \infty)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ 0 < x_0 < \infty)$;

5) $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \quad (-\infty < x_0 < \infty)$;

6) $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0 \quad (-\infty < x_0 < \infty)$;

7) $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0 \quad \left(x_0 \neq \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\ k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$;

8) $\lim\limits_{x\to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0 \quad (-1 \leqslant x_0,\ x \leqslant 1)$;

9) $\lim\limits_{x\to x_0} \arccos x = \arccos x_0 \quad (-1 \leqslant x_0,\ x \leqslant 1)$;

10) $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0 \quad (-\infty < x_0 < \infty)$.

Если простейшие элементарные функции комбинировать, разрешая применять конечное число раз операции сложения, вычитания, умножения, деления и функции от функции, то будем получать функции, которые называются *элементарными функциями*, например, $2+x^3$, $\sqrt{1-x^2}$, $\cos^3 x^2$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\frac{2-x}{x+1}$ — элементарные функции.

§ 3.9. Непрерывность сложной функции

При вычислении пределов функции надо учитывать, что если функция $x=\varphi(u)$ непрерывна в точке u_0, а функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0=\varphi(u_0)$, то функция

$$F(u) = f[\varphi(u)]$$

непрерывна в точке u_0. Ведь

$$\lim_{u\to u_0} F(u) = \lim_{u\to u_0} f[\varphi(u)] = \lim_{x=\varphi(u)\to x_0} f[\varphi(u)] =$$
$$= \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = F[\varphi(u_0)]. \quad (16)$$

Пример 1. Функцию $y=\sin x^3$ можно записать через две непрерывные функции $y=\sin u$, $u=x^3$, поэтому она тоже непрерывна для всех x.

Пример 2. Функцию

$$y=\sqrt{1-x}$$

можно записать в виде цепи функций

$$y=\sqrt{u}, \quad u=1-v, \quad v=x^2.$$

Первая из этих трех функций непрерывна для $u \geqslant 0$, вторая непрерывна для всех v, и третья непрерывна для всех x. Это показывает, что исходная функция непрерывна для всех тех x, для которых $1-x^2 \geqslant 0$, т. е. для x, удовлетворяющих неравенствам $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выяснить, для каких x непрерывны функции $\cos^2 x$, $\cos 3x$, $\operatorname{tg} 2x$, x^2+2x-1, $\frac{x+3}{x-1}$.

Непрерывные функции образуют основной класс функций, с которыми оперирует математический анализ.

§ 3.10. Разрывные функции

Разрывные функции описывают скачкообразные процессы, встречающиеся в природе. При ударе, например, величина скорости тела меняется скачкообразно. Многие качественные переходы сопровождаются скачками.

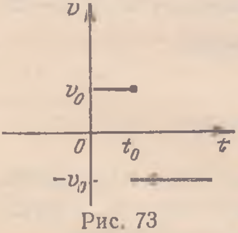

Рис. 73

Пример 1. Упругий шарик двигался прямолинейно и равномерно со скоростью v_0. В момент времени t_0 он ударился о стенку и после этого стал двигаться в противоположном направлении с той же скоростью v_0. Зависимость скорости шарика от времени t изображена графиком на рис. 73, разрывным в точке t_0.

Практически можно считать, что скорость в момент t_0 изменилась мгновенно: в момент t_0 она еще равнялась v_0, а при $t > t_0$ стала равной $-v_0$.

График изображает функцию $v(t)$, определяемую следующими равенствами:

$$v(t) = \begin{cases} v_0 & (t \leqslant t_0), \\ -v_0 & (t > t_0). \end{cases}$$

Она разрывна при $t = t_0$ и непрерывна для остальных t $(t \neq t_0)$.

Пример 2. Зависимость $Q = f(t)$ между температурой t одного грамма воды (льда) и количеством Q калорий находящегося в ней тепла, когда t изменяется между $-10°$ и $+10°$, если принять условно, что при $-10°$ величина $Q = 0$, выражается следующими формулами:

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}5t + 5, & -10 \leqslant t < 0, \\ t + 85\,{}^{*}), & 0 < t < 10. \end{cases}$$

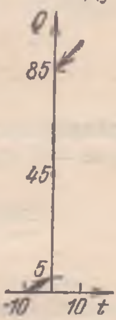

Рис. 74

Мы считаем, что теплоемкость льда равна 0,5. При $t = 0$ эта функция оказывается неопределенной: многозначной; можно для удобства условиться, что при $t = 0$ она принимает вполне определенное значение, например $f(0) = 45$. Функция $Q = f(t)$, очевидно, разрывная при $t = 0$, изображена на рис. 74.

На рис. 66 изображен график функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Она определена и непрерывна для всех $x \neq 0$. Непрерывность следует из того, что функции $y = \sin x$ и $y = x$ отдельно непрерывны, поэтому их частное тоже есть непрерывная функция для тех x, для которых знаменатель не равен нулю, т. е. для всех x, исключая $x = 0$.

Из графика видно, и мы это подкрепили выше вычислениями, что

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Положив $f(0) = 1$, мы получим, что функция $f(x)$ будет определена и непрерывна для всех x, в том числе и $x = 0$.

---

*) Удельная теплота таяния льда при 0 °С равна 80 кал. на грамм.

Обратим внимание на график функции $y=\sin\frac{1}{x}$, изображенный на рис. 70. Эта функция не определена при $x=0$, и ее пределы в точке $x=0$ (правый и левый) не существуют. Следовательно, функция $\sin\frac{1}{x}$ будет иметь разрыв в точке $x=0$ при любом доопределении ее в этой точке.

Часто встречаются функции $f(x)$, непрерывные на некотором интервале, за исключением отдельных точек x_0, где

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

Говорят, что в таких точках функция f *обращается в бесконечность*. Например, функция

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x+3)}$$

непрерывна на $(-\infty, \infty)$, за исключением точек $x=2$, $x=-3$, где она обращается в бесконечность:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{(x-2)(x+3)}=\infty, \qquad \lim_{x\to -3}\frac{x^2+1}{(x-2)(x+3)}=\infty.$$

Замечание. Надо знать два определения непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0: 1) на языке приращений (если $\Delta x\to 0$, то $\Delta y\to 0$) и 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Надо знать также, что если функция $f(x)$ непрерывна в любой точке интервала (отрезка), то ее график непрерывен на этом интервале (отрезке), и обратно, непрерывность графика $f(x)$ на интервале (отрезке) влечет непрерывность $f(x)$ во всех его точках. Функция разрывна в точке x_0, если она не является непрерывной в ней.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое приращение Δy функции $y=f(x)$ в точках x, соответствующее приращению аргумента Δx?

2. Сформулируйте непрерывность функции $y=f(x)$

а) на языке свойств ее графика,

б) при помощи Δy и Δx.

3. Если функция f непрерывна в точке x_0, то как она ведет себя при $x\to x_0$?

4. Приведите примеры разрывных функций.

5. Перечислите простейшие элементарные функции.

6. Как определяются элементарные функции? Приведите примеры.

7. Приведите примеры функций, обращающихся в точке в бесконечность.

8. В каких точках обращаются в бесконечность функции

$$\frac{1}{x^2}, \quad \frac{x+1}{x^2-3x+2}, \quad \frac{x^2+x+2}{x-3}, \quad \frac{x-2}{x+5}?$$

9. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.