ГЛАВА 4

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ, ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ И ОБЩАЯ СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИИ

§ 4.1. Свойства функции a^x

Показательная функция a^x для положительного числа a, не равного 1 ($a > 0$, $a \neq 1$), определялась в школе на различных этапах обучения для x натуральных, целых и рациональных. Ниже она будет определена для произвольных действительных x.

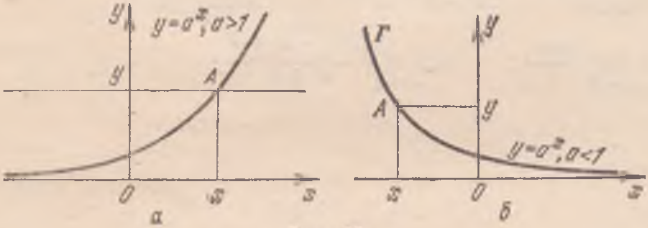

Рис. 75

Имеют место следующие фундаментальные свойства показательной функции:

$$a^0 = 1, \tag{1}$$

$$a^x > 0 \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{2}$$

$$a^{x+y} = a^x a^y \qquad (-\infty < x,\ y < \infty), \tag{3}$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \tag{4}$$

и, если $a > 1$ (рис. 75, a), то

$$a^x < a^y \qquad (-\infty < x < y < \infty), \tag{5}$$

$$a^x \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \tag{6}$$

$$a^x \to 0 \quad \text{при} \quad x \to -\infty. \tag{7}$$

Если же $a < 1$ (рис. 75, $б$), то в силу равенства

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x},$$

и из (4), (5), (6) следует, что

$$a^x > a^y \qquad (-\infty < x < y < \infty), \tag{5'}$$

$$a^x \to 0, \quad \text{если} \quad x \to +\infty, \tag{6'}$$

$$a^x \to +\infty, \quad \text{если} \quad x \to -\infty. \tag{7'}$$

Кроме того, справедливо свойство: *показательная функция a^x непрерывна на всей действительной оси.*

На рис. 75 изображены графики a^x при $a > 1$ и $0 < a < 1$.

§ 4.2. a^x для целых и рациональных x

Если n — натуральное число, то число a^n определяется как произведение $a^n = a \ldots a$ из n сомножителей, каждый из которых равен a, а число a^{-n} — при помощи равенства

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

По определению $a^0 = 1$, $a^1 = a$.

Этим функция a^x определена для любых целых n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Свойства (1) — (7) для целых x проверяются легко. Если q — натуральное, то число $a^{1/q}$ определяется как арифметическое значение корня q-й степени из a, т. е. $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$ есть такое неотрицательное число, q-я степень которого равна a:

$$(a^{1/q})^q = a.$$

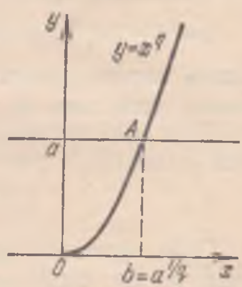

Рис. 76

На самом деле это число положительное, потому что q-я степень нуля есть нуль, а в данном случае $a > 0$.

Возникает вопрос о существовании числа $a^{1/q}$, т. е. есть ли на самом деле такое положительное число, q-я степень которого равна a. Да, есть. Убедимся в этом. Функция

$$y = x^q,$$

где q — натуральное число, имеет для значений $x \geqslant 0$ график Γ вида, как на рис. 76. Ордината y точек Γ непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$, когда ее абсцисса непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$. Проведем выше оси x прямую, параллельную оси x, на расстоянии, равном a.

Она пересекает Г в одной-единственной точке A, абсциссу которой обозначим через b:

$$b^q = a.$$

Следовательно,

$$b = a^{1/q}.$$

Мы доказали существование числа $b = a^{1/q}$ графическим методом. Можно доказать это и формально, не обращаясь к графику. Число b — единственное: любое другое число, возведенное в степень q, дает число либо большее, чем a, либо меньшее, чем a.

Из единственности вытекает следующий факт: если A и B — положительные числа и

$$A^q = B^q,$$

то

$$A = B.$$

В самом деле, A и B суть арифметические значения корня q-й степени из одного и того же числа. Но тогда $A = B$, потому что арифметическое значение корня q-й степени из положительного числа единственно.

Пусть теперь p/q есть произвольное положительное рациональное число (p и q — целые, $q > 0$).

По определению

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q} \quad \text{или} \quad a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}. \tag{8}$$

Здесь первое равенство дает определение $a^{p/q}$, второе же можно доказать. В самом деле, если возвести третий член в (8) в q-ю степень, то получим a^p, а если возвести второй член (8) в q-ю степень, то тоже получим a^p:

$$(\sqrt[q]{a})^{pq} = [(\sqrt[q]{a})^q]^p = a^p.$$

Этим функция a^x определена для любых рациональных x. Ее свойства (1)—(7) п. 4.1 для рациональных x, y вытекают из соответствующих свойств корней. Например, если $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$ дроби (q, s — натуральные и p, r — целые), то

$$a^x a^y = a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps}{qs}} a^{\frac{rq}{sq}} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \sqrt[qs]{a^{rq}} =$$

$$= \sqrt[qs]{a^{ps+rq}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = a^{x+y}.$$

§ 4.3. a^x для действительных x

Показательной функцией a^x называется непрерывная функция, определенная на действительной оси x, вычисляемая для рациональных значений $x=\frac{p}{q}$ по формуле

$$a^x=\sqrt[q]{a^p}.$$

Из этого определения следует, что если x есть иррациональное число, то для того чтобы вычислить a^x, надо взять любую последовательность рациональных чисел r_k, стремящуюся к x $(r_k \to x)$, и положить a^x равным пределу переменной a^{r_k}, когда $r_k \to x$, т. е.

$$\lim_{r_k \to x} a^{r_k}=a^x. \qquad (9)$$

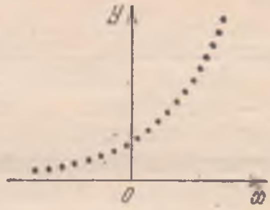

Рис. 77

В системе координат xOy мысленно отметим все точки (x, a^x) для рациональных значений (рис. 77). График изображен пунктирной линией, чтобы подчеркнуть, что он состоит из точек, соответствующих только рациональным значениям x. Это точки вида $\left(\frac{p}{q}, \sqrt[q]{a^p}\right)$, где p, q — целые и $q \neq 0$.

Оказывается, этот график можно продолжить для любых иррациональных x единственным образом, так что пунктирная линия превращается в непрерывную линию, в график непрерывной функции a^x.

Доказательство свойств (1)—(7) п. 4.1 для действительных x, y может быть получено на основании того, что эти свойства верны для рациональных x, y, применением метода пределов.

Например, пусть x и y — данные действительные числа; вводим две последовательности рациональных чисел r_k и ρ_k, для которых

$$r_k \to x, \quad \rho_k \to y.$$

Тогда

$$a^x a^y=\lim_{k\to\infty} a^{r_k} \lim_{k\to\infty} a^{\rho_k}=\lim_{k\to\infty}\left(a^{r_k} a^{\rho_k}\right)=\lim_{k\to\infty} a^{r_k+\rho_k}=a^{x+y},$$

и мы получим свойство (3) для действительных x, y.

З а м е ч а н и е. Сформулированное выше определение показательной функции требует обоснования. Именно, требуется доказать, что существует, и притом единственная, функция, указанная в определении.

Ниже выводится неравенство (неравенство Бернулли), на основе которого возможно провести это доказательство.

§ 4.4. Неравенство Бернулли

Рассмотрим функцию a^x на отрезке $[c, d]$. Положим $M=a^d$. Справедливо неравенство ($a>1$)

$$|a^y-a^x|\leqslant 2M(a-1)|x-y|, \quad c\leqslant x, \quad y\leqslant d, \quad |x-y|<1, \tag{10}$$

называемое *неравенством Бернулли*.

Это неравенство показывает, что если приращение $y-x$ аргумента x мало, то соответствующее ему приращение показательной функции a^y-a^x тоже мало, т.е. функция a^x непрерывна.

Пример. Вычислить приближенно $3^{\sqrt{2}}$. Определить абсолютную погрешность.

Решение. На микрокалькуляторе получаем

$$\sqrt{2}\approx 1{,}4142136,$$
$$3^{\sqrt{2}}\approx 3^{1{,}4142136}=4{,}728817\approx 4{,}72882.$$

Абсолютная погрешность не превышает ($a=3$, $|x-y|<$ $<10^{-7}$, $\sqrt{2}<2=d$, $M<3^2$):

$$2M(a-1)\cdot 10^{-7}\leqslant 2\cdot 3^2\cdot 2\cdot 10^{-7}=36\cdot 10^{-7}<10^{-5}.$$

Поэтому результат естественно округлить до пятого знака после запятой:

$$3^{\sqrt{2}}\approx 4{,}72882.$$

Дадим обоснование неравенства (10). Отметим прежде всего неравенство

$$(1+\alpha)^N\geqslant 1+N\alpha \qquad (\alpha>0, \quad N=1, 2, 3, \ldots). \tag{11}$$

При $N=1$ оно тривиально. Допустим теперь, что оно верно при $N-1$:

$$(1+\alpha)^{N-1}\geqslant 1+(N-1)\alpha.$$

Тогда оно верно и при N:

$$(1+\alpha)^N=(1+\alpha)^{N-1}(1+\alpha)\geqslant[1+(N-1)\alpha](1+\alpha)=$$
$$=1+N\alpha+(N-1)\alpha^2\geqslant 1+N\alpha.$$

Мы доказали неравенство (11) по индукции (см. далее § 11.2).

Пусть теперь $a > 1$ и N — натуральное число, тогда $a^{1/N} > 1$ и

$$a^{1/N} = 1+\alpha \quad (\alpha > 0), \qquad a=(1+\alpha)^N \geqslant 1+N\alpha,$$

$$a-1 \geqslant N\alpha, \qquad \frac{a-1}{N} \geqslant \alpha.$$

Следовательно, $a^{1/N}-1 \leqslant \frac{a-1}{N}$.

Пусть теперь h — произвольное рациональное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < h < 1$. Подберем натуральное N так, чтобы

$$\frac{1}{N+1} \leqslant h < \frac{1}{N}.$$

Тогда

$$a^h - 1 < a^{1/N} - 1 \leqslant \frac{a-1}{N} = \frac{a-1}{N+1}\,\frac{N+1}{N} \leqslant 2(a-1)h, \tag{12}$$

потому что

$$\frac{1}{N+1} \leqslant h, \qquad \frac{N+1}{N} = 1+\frac{1}{N} < 2.$$

Пусть теперь x и y — рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам $|x-y| < 1$, $c \leqslant x$, $y \leqslant d$ и $M = a^d$; тогда на основании неравенства (12), считая, что $y > x$ и $y-x=h$, получаем

$$|a^x - a^y| = a^y - a^x = a^x(a^{y-x}-1) \leqslant$$
$$\leqslant M\cdot 2(a-1)(y-x) = 2M(a-1)|x-y|.$$

Мы доказали неравенство Бернулли для рациональных чисел x, y ($M = a^d$, $c \leqslant x$, $y \leqslant d$, $0 < y-x < 1$):

$$|a^x - a^y| \leqslant 2M(a-1)|x-y|.$$

Если x — рациональное число и переменная y_k ($k=1, 2, \ldots$), пробегающая рациональные числа, стремится к x, то имеет место неравенство $\left|a^x - a^{y_k}\right| \leqslant 2M(a-1)|x-y_k|$. Правая его часть при $k \to \infty$ стремится к нулю ($x - y_k \to 0$), следовательно, и левая. Откуда для рациональных x

$$a^x = \lim_{r_k \to x} a^{y_k}.$$

Если теперь x — произвольное иррациональное число, то для него тоже можно подобрать стремящуюся к нему переменную y_k ($y_k \to x$) и доказать, что переменная a^{y_k} имеет предел. Естественно его обозначить через a^x. Этим дается определение показательной функции для иррационального x. Доказательство существования предела основано на уже выведенном неравенстве Бернулли для рациональных x, y. При этом приходится обращаться к более развитой теории пределов чем та, которую мы получили в этой книжке. Переход в (10) от рациональных x, y к действительным нетруден.

Пример 1. Вычислить $2^{1,7}$ с помощью микрокалькулятора.

Решение.

$$\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{1}\ \boxed{,}\ \boxed{7}\ \boxed{=}\ 3{,}2490096,$$

результат выписан с точностью до единицы седьмого разряда после запятой, т. е. абсолютная погрешность не превышает 10^{-7}.

Пример 2. Вычислить на микрокалькуляторе $7^{1/11}$.

Решение.

$$\frac{1}{11}\approx \boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ 0{,}0909091 \text{ (записываем)},$$

$$7^{\frac{1}{11}}\approx 7^{0{,}0909091}=$$

$$=\boxed{7}\,\boxed{y^x}\,\boxed{0}\,\boxed{,}\,\boxed{0}\,\boxed{9}\,\boxed{0}\,\boxed{9}\,\boxed{0}\,\boxed{9}\,\boxed{1}\,\boxed{=}\ 1{,}19351.$$

В оценке Бернулли приближения $7^{1/11}\approx 7^{0{,}0909091}$ имеем $M=2^{1/11}\leqslant 2$, $a=7$, $|x-y|<10^{-7}$, следовательно, абсолютная погрешность этого приближения не больше

$$2M(a-1)|x-y|<2\cdot 2(7-1)\cdot 10^{-7}=24\cdot 10^{-7}\leqslant 10^{-5}.$$

Поэтому мы оставили только 5 цифр у окончательного результата.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для какого числа a определяется показательная функция a^x?

2. Определите a^x для x натуральных, целых отрицательных, рациональных.

3. Дайте определение функции a^x для любого действительного числа.

4. Сформулируйте неравенство Бернулли.

5. Вычислите на микрокалькуляторе числа $2^{3,7}$, $2^{2,1}$, $3^{0,23}$, $4^{0,27}$. Оцените погрешность приближения.

6. Вычислить на микрокалькуляторе числа $2^{\sqrt{3}}$, $3^{\sqrt{7}}$, 3^{π}, $5^{1/7}$.

§ 4.5. Число e

Рассмотрим переменную x_n, пробегающую последовательность чисел x_1, x_2, x_3, ...

Определение. Переменная x_n *ограничена сверху числом* M, если выполняются неравенства $x_n\leqslant M$ для любых $n=1, 2, \ldots$

Определение. Переменная x_n *не убывает, если для любого* n

$$x_n \leqslant x_{n+1}.$$

Теорема 1. *Если переменная x_n не убывает и ограничена сверху числом M, то она имеет предел, равный некоторому числу a, не превышающему M:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \leqslant M.$$

Наметим доказательство.

Если на числовой прямой отметить точки $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и точку M (рис. 78), то каждая последующая точка x_{n+1} будет находиться правее предыдущей x_n или совпадать

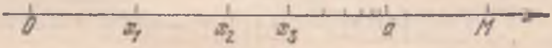

Рис. 78

с ней и в то же время все точки x_n будут находиться левее M или, может быть, какая-либо из них совпадает с M (но тогда, очевидно, и все последующие за ней совпадут с M) и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$.

Так как номеров n бесконечное множество, то точки x_n обязательно должны сгущаться около некоторой точки $a \leqslant M$, которая и будет пределом x_n.

Замечание 1. В теореме 1 можно считать, что переменная x_n ограничена снизу числом m ($m \leqslant x_n$, $n = 1, 2, \ldots$) и не возрастает ($x_{n+1} \leqslant x_n$), и тогда тоже существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant m$.

Рассмотрим переменную

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{13}$$

Вот таблица первых ее значений:

$$u_1 = 2; \quad u_2 = 2{,}25; \quad u_3 \approx 2{,}37; \quad u_4 \approx 2{,}44; \; \ldots$$

Мы видим, что для малых n переменная u_n возрастает. Можно установить и в общем случае, разлагая выражение (13) по формуле бинома Ньютона (см. п. 11.2), что (доказательство см. ниже)

$$u_n < u_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Кроме того, с помощью разложения по биному Ньютона доказывается, что переменная u_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ограничена сверху числом 3. Но тогда на основании теоремы 1 переменная u_n имеет предел, не превышающий 3.

Этот предел называется *числом* e. Он равен*)

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots \tag{14}$$

Если положить в формуле (14) $\alpha = 1/n$, то получим, что при $n \longrightarrow \infty$ будет $\alpha \longrightarrow 0$, и, следовательно,

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e. \tag{15}$$

Мы установили формулу (15) в предположении, что α стремится к нулю по закону $\alpha = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Но можно доказать, что эта формула (и этим мы будем пользоваться в дальнейшем) верна при любом способе стремления α к нулю.

Докажем приведенные выше утверждения.

Согласно формуле бинома Ньютона для натурального n имеют место равенства

$$u(n) = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

$$u(n+1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^n}.$$

Члены суммы $u(n)$ меньше соответствующих членов $u(n+1)$ и, кроме того, $u(n+1)$ имеет на один (последний) положительный член больше чем $u(n)$. Поэтому $u(n) < u(n+1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и переменная $u(n)$ возрастает.

Далее

$$u(n) = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots <$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

*) Читатель, который ознакомится с гл. 9, может вычислить самостоятельно число e с любой точностью.

Это показывает, что переменная $u(n)$ ограничена сверху числом 3.

Таким образом, переменная $u(n)$ возрастает и ограничена сверху числом 3. По теореме 1 она имеет предел, не превышающий 3, который мы называем числом e.

Мы доказали равенство (14), когда n стремится к бесконечности, пробегая натуральные числа. Но равенство (14) верно и тогда, когда n стремится к ∞ любого знака, и притом пробегая любые числовые значения, не обязательно натуральные. Докажем это.

Пусть сначала n стремится к $+\infty$, пробегая какие-либо значения не обязательно целые. Обозначим через $[n]$ целую часть n. Таким образом, например,

$$[7,3]=7, \quad [7]=7.$$

Для любого положительного числа n имеют место очевидные неравенства

$$[n]\leqslant n<[n]+1.$$

Но тогда

$$\left(1+\frac{1}{[n]+1}\right)^{[n]+1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{[n]}\right)^{[n]+2}<e\left(1+\frac{1}{[n]}\right)^{2}.$$

Деля на $1+\frac{1}{n}$, получим неравенства

$$\frac{\left(1+\frac{1}{[n]+1}\right)^{[n]+1}}{1+\frac{1}{n}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e\,\frac{\left(1+\frac{1}{[n]}\right)^{2}}{1+\frac{1}{n}}. \tag{16}$$

Будем n стремить к $+\infty$. Тогда переменное число $[n]+1$ будет тоже стремиться к $+\infty$, пробегая натуральные числа. Но тогда числитель в левой части соотношений (16) стремится к e. Что же касается знаменателя, то он стремится к 1. Следовательно, левая и правая части в (16) стремятся к e, но тогда средняя часть, равная $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, тоже стремится к e. Этим доказана верность равенства (14), когда положительное n стремится к $+\infty$ по любому закону.

Пусть теперь $n\to-\infty$, тогда $m=-n\to+\infty$, и, следовательно,

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m}=$$
$$=\lim_{m\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)\right]=e\cdot 1=e.$$

Теперь уже равенство (14) доказано как в случае $n\to+\infty$, так и в случае $n\to-\infty$, где числа n не обязательно целые.

Введем теперь новую переменную α при помощи равенства $\alpha=\frac{1}{n}$. Тогда, очевидно, $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$, и мы доказали формулу (15), когда α стремится к нулю по любому закону.

Пример 1. Если $0 < q < 1$, то переменная q^n убывает ($q^{n+1} < q^n$) и ограничена снизу числом 0 ($0 < q^n$). Поэтому на основании замечания 1 существует предел

$$\lim_{n\to\infty} q^n = A \geqslant 0.$$

На самом деле $A = 0$, потому что

$$A = \lim_{n+1\to\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to\infty} (q^n \cdot q) = \lim_{n\to\infty} q^n \cdot q = Aq$$

и $A = Aq$, т. е. $A(1-q) = 0$, откуда $A = 0$.

Пример 2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2} = \lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^2 =$$
$$= \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^2 = e^2.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; 4) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+2\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

2. Сформулируйте теорему о существовании предела ограниченной неубывающей последовательности.

3. Что такое число e? Дайте несколько определений.

4. Нарисуйте схематические графики функций e^x и e^{-x}.

§ 4.6. Логарифмическая функция

Пусть a есть положительное число, не равное единице ($0 < a$, $a \neq 1$), и y есть произвольное положительное число ($0 < y < \infty$). *Логарифмом* y при основании a называется такое число $x = \log_a y$, что если возвести a в степень x, то получается y. Таким образом,

$$a^x = y. \tag{17}$$

Поэтому можно еще написать

$$a^{\log_a y} = y, \qquad 0 < y < \infty, \tag{18}$$

или еще

$$\log_a a^x = x, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{19}$$

Примеры

$\log_a 1 = \log_a a^0 = 0,$ $\log_2 8 = \log 2^3 = 3,$

$\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 2^{-3} = -3,$ $\log_{10} 10^k = k,$

$\log_a 1 = 0,$ $\log_{10} 10 = 1,$

$\log_{10} 100 = 2,$ $\log_{10} 1000 = 3,$

$\log_{10} 0,1 = -1,$ $\log_{10} 0,01 = -2.$

Возникает вопрос, всегда ли решается относительно x уравнение (17), или, что все равно, существует ли для положительного числа y его логарифм при основании a. Да, существует, и единственный. В этом мы убедимся на основании свойств функции a^x, которые мы сейчас перечислим (будем считать, что $a > 1$):

1) a^x непрерывна на $(-\infty, \infty)$, т. е. имеет непрерывный график;

2) a^x — возрастающая функция, т. е. $a^x < a^y$, если $x < y$;

3) $a^x \to +\infty$ при $x \to +\infty$;

4) $a^x \to 0$ при $x \to -\infty$.

На рис. 75, *а* изображен график функции a^x $(a > 1)$. В силу 1) это непрерывная кривая, распространенная над всей осью x. В силу 2), 3), 4), когда абсцисса x точки графика возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, ее ордината y возрастает от 0 до $+\infty$.

Значение x, удовлетворяющее уравнению (17) для данного $y > 0$, можно получить следующим образом. На оси ординат отложим вверх от начала координат на расстоянии, равном y, точку и через эту точку проведем прямую, параллельную оси абсцисс. Эта прямая обязательно пересечет график, и притом в единственной точке A. Абсцисса x точки A и решает, очевидно, уравнение (17) для данного y (см. рис. 75, *а*).

Мы доказали существование логарифма y $(y>0)$ при основании a, применив графический метод. При этом мы получили новую функцию x, зависящую от y, которая называется *логарифмом y при основании a* и обозначается так: $x = \log_a y$.

Итак,

$$x = \log_a y \qquad (0 < y < \infty)$$

есть функция, приводящая в соответствие каждому положительному числу y такое x, что $y = a^x$, т. е. выполняется равенство (18).

Благодаря свойствам (18) и (19) функция $\log_a y$ называется обратной по отношению к функции a^x, а функция a^x называется обратной по отношению к $\log_a y$ (см. § 2.10).

Логарифмическая функция $x=\log_a y$ при $a>1$ обладает следующими, вытекающими непосредственно из приведенных рассмотрений свойствами:

1) $\log_a y$ непрерывна на $(0, \infty)$;

2) $\log_a y$ — возрастающая функция, т. е.

$$\log_a y_1 < \log_a y_2 \qquad (0<y_1<y_2<\infty)$$

для любых указанных y_1, y_2;

3) $\log_a y \to \infty$ при $y \to +\infty$;

4) $\log_a y \to -\infty$ при $y \to 0$.

Если в формуле $x=\log_a y$ $(0<y<\infty)$ поменять местами x и y, то получим запись логарифмической функции в обычном виде:

$$y=\log_a x \qquad (0<x<\infty),$$

где x — аргумент, а y — функция. График функции $y=\log_a x$ в системе координат xOy получим, если в этой системе изобразить график функции

$$x=a^y \qquad (-\infty<y<\infty)$$

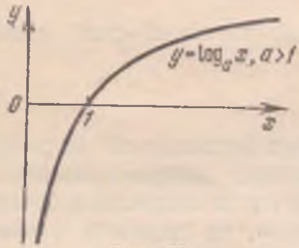

Рис. 79

(рис. 79), т. е. множество точек вида $(a^y, y]$ или, так как

$$x=a^y, \qquad y=\log_a x,$$

то множество точек $(x, \log_a x]$.

Таким образом, кривая на рис. 79 есть не только график функции $x=a^y$ $(-\infty<y<\infty)$, но и график функции $y=\log_a x$ $(0<x<\infty)$.

Можно еще сказать, что при $a>1$ функция $\log_a x$ отображает интервал $(0, \infty)$ значений x на интервал $(-\infty, \infty)$ значений y.

Пусть теперь a удовлетворяет неравенствам $0<a<1$. Выпишем нужные нам свойства функции $y=a^x$:

1) a^x непрерывна на $(-\infty, \infty)$;

2) a^x — убывающая функция, т. е. $a^x>a^y$ $(x<y)$;

3) $a^x \to 0$ при $x\to+\infty$;

4) $a^x \to +\infty$ при $x\to-\infty$.

График a^x при $0<a<1$ изображен на рис. 75, *б*. Мы видим, что функция $y=a^x$ и в случае $0<a<1$ отображает интервал $(-\infty, \infty)$ значений x на интервал $(0, \infty)$ значений y.

Мы, как и выше, можем задать произвольное положительное (т. е. принадлежащее к интервалу $(0, \infty)$) значение y и привести ему в соответствие такое x, что будет выполняться равенство $x = \log_a y$.

Чтобы получить x по данному y, надо взять на оси ординат (см. рис. 75, *б*) точку, имеющую ординату y, и провести через эту точку прямую, параллельную оси x. Последняя пересечет график Г в единственной точке A, абсцисса которой и есть искомое значение x, т. е. такое x, для которого $y = a^x$.

Свойства функции $\log_a y$ при $0 < a < 1$ такие же, как в случае $a > 1$; однако есть исключение. Теперь, когда y возрастает от 0 до $+\infty$, соответственно x убывает от $+\infty$ до $-\infty$:

$$\log_a y_1 > \log_a y_2 \qquad (0 < y_1 < y_2 < \infty).$$

Выпишем формулы (18) и (19):

$$x = a^{\log_a x} \qquad (0 < x < \infty), \tag{20}$$

$$\log_a a^x = x \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{21}$$

Мы заменили в (18) y на x, но это не имеет значения.

Число a может быть здесь любым положительным числом, отличным от 1 $(a \neq 1)$. Равенства (20) и (21) называют тождествами на указанных там интервалах, потому что они имеют место для любых x, принадлежащих к указанным интервалам.

Из равенства (20) на основании свойств показательной функции следует для любых $x, y > 0$:

$$a^{\log_a (xy)} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}. \tag{22}$$

Но тогда

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$
$$(0 < x, \quad y < \infty, \quad a > 0, \quad a \neq 1). \tag{23}$$

Из (22) следует (23), потому что если $a^{u_1} = a^{u_2}$, то $u_1 = u_2$. Если бы $u_1 \neq u_2$, то числа a^{u_1} и a^{u_2} были бы различны. Но можно и формально получить (23), взяв логарифм при основании a от левой и правой частей (22), т. е. воспользовавшись формулой (21).

Если в (23) заменить x на $\frac{x}{y}$, то получим

$$\log_a x = \log_a \frac{x}{y} + \log_a y,$$

или

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \tag{24}$$
$$(0 < x, \quad y < \infty, \quad a > 0, \quad a \neq 1).$$

Далее

$$a^{\log_a x^y} = x^y = (a^{\log_a x})^y = a^{y \log_a x},$$
$$\log_a x^y = y \log_a x \qquad (0 < x, \quad y < \infty, \quad a > 0, \quad a \neq 1). \tag{25}$$

Наконец, отметим, что для положительных не равных 1 чисел a и b имеет место

$$a^{\log_a b \log_b a} = (a^{\log_a b})^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a,$$
$$\log_a b \log_b a = 1. \tag{26}$$

Верно также

$$\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b \qquad (A > 0), \tag{27}$$

потому что $a^{\log_a A} = A$ и $a^{\log_a b \log_b A} = b^{\log_b A} = A$.

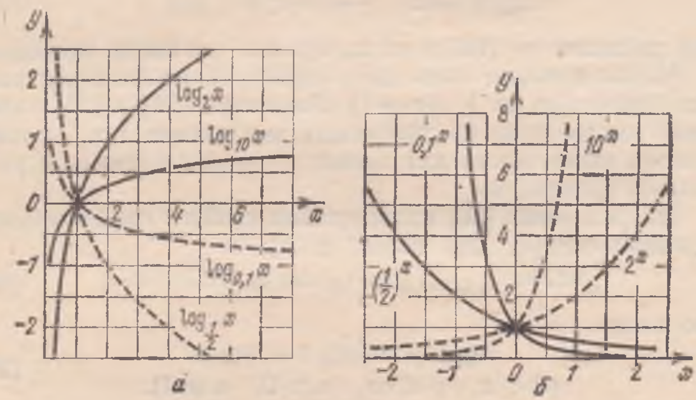

Рис. 80

Логарифм числа a при основании e называется *натуральным логарифмом* числа a и обозначается так: $\log_e a = \ln a$.

Формулы (20)—(27) являются основными при вычислениях с логарифмами. Их надо усвоить и запомнить.

На рис. 80, *а*, *б* приведены графики частных функций a^x, $\log_a x$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для каких оснований рассматриваются логарифмы?

2. Что такое логарифм числа y при основании a?

3. Для каких чисел y определяется логарифм? Может ли y быть отрицательным?

4. Заполните таблицу

x	1	10	100	1000	10000	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\log_{10} x$									

5. Сравните эти числа с нулями и между собой:
а) $\log_{10} 7$; б) $\log_{10} 17$; в) $\log_{10} 873$;
г) $\log_{10} 10232$; д) $\log_{10} 0,7$; е) $\log_{10} 0,03$;
ж) $\log_{10} 0$; з) $\log_{10} 0,0027$; и) $\log_{10}(-10)$.

6. Покажите с помощью графика функции $y=a^x$, что $\log_a y$ существует.

7. Как называются функции $y=a^x$ и $x=\log_a y$?

8. Как построить график логарифмической функции $y=\log_a x$ при помощи графика показательной функции?

9. Чем отличаются графики $\log_a x$ с $a>1$ от графика $\log_a x$ с $a<1$?

10. Выпишите основные формулы логарифмирования.

11. Решите уравнения:

1) $a^x=b$, 2) $a^x=a^3$, 3) $a^x=a^{-3}$,

4) $a^x=1$, 5) $10^x=1000$, 6) $10^x=\frac{1}{1000}$, 7) $10^x=0$,

8) $2^x=32$, 9) $2^x=\frac{1}{32}$, 10) $2^x=-3$

Решение. 1) По определению логарифм от b при основании a есть такое число x, что $a^x=b$, т. е. $x=\log_a b$. Но можно рассуждать так. Прологарифмируем при основании a левую и правую части равенства $a^x=b$. Тогда $\log_a a^x=\log_a b$. Но $\log_a a^x=x$, поэтому $x=\log_a b$.

12. Чему равно число y, если

1) $\log_a y=x$, 4) $\log_{10} y=x$,
2) $\log_a y=2$, 5) $\log_{10} y=2$,
3) $\log_a y=-3$, 6) $\log_{10} y=-2$.

Решение. 1) $y=a^{\log_a y}=a^x$.

§ 4.7. Логарифм с основанием 10

Пусть в десятичной системе счисления задано положительное число A.

Значащей цифрой числа A называется первая (слева направо) цифра, не равная нулю, а также любая следующая за ней цифра. Например, все цифры числа 830 200 значащие, у числа 0,00 302 цифра 3 и следующие за ней цифры 0 и 2 — значащие.

Положительное число A можно представить в виде

$$A = a \cdot 10^k, \tag{28}$$

где a удовлетворяет неравенствам

$$1 \leqslant a < 10$$

и k — целое. Говорят, что число A записано *в стандартном виде*.

Число a можно получить, переставив в A запятую так, чтобы она оказалась непосредственно после первой значащей цифры. Например, правые части равенств

$$830200 = 8{,}302 \cdot 10^5,$$
$$0{,}00302 = 3{,}02 \cdot 10^{-3},$$
$$100 = 1 \cdot 10^2$$

суть записи левых в стандартном виде.

Логарифмируя равенство (28) при основании 10, получим

$$\log_{10} A = k + \log_{10} a.$$

Число k называется *характеристикой*, а число $\log_{10} a$ — *мантиссой десятичного логарифма* A. Характеристика — целое число, а мантисса — неотрицательное число, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant \log_{10} a < 1$. Ведь $\log_{10} 1 = 0$, $\log_{10} 10 = 1$, а функция $y = \log_{10} x$ возрастает.

Существуют подробные таблицы мантисс — таблицы десятичных логарифмов. Ими широко пользовались несколько столетий для вычислений произведения и частного чисел, а также корней из чисел. Однако в настоящее время эта работа выполняется на электронных микрокалькуляторах.

Пример 1.

$$\log_{10} 830\,200 = \log_{10} (8{,}302 \cdot 10^5) = 5{,}9041744,$$
$$\log_{10} (0{,}00302) = \log_{10} (3{,}02 \cdot 10^{-3}) = \bar{3}{,}4800069,$$
$$\log_{10} 100 = \log_{10} (1 \cdot 10^2) = 2.$$

После запятых выписаны вычисленные на микрокалькуляторе или по таблицам мантиссы соответствующих чисел.

Пример 2.

$$\log_{10} 3{,}02 = \boxed{3}\ \boxed{,}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{\log_{10}}\ \boxed{=} = 0{,}4800069.$$

Перед запятой записывается характеристика. Если она отрицательная, то знак ставится над ее абсолютной величиной ($-3 = \overline{3}$). Таким образом, если характеристика отрицательная, то перед запятой стоит отрицательное число, а после запятой — положительное.

Пример 3. Пусть $\log_{10} x = \overline{3},4800069$, тогда $x = 10^{-3}\, 10^{0,4800069} = 10^{-3}\, 3{,}0199997 = 0{,}00302$.

Действия умножения и деления больших чисел мы выполняем на микрокалькуляторах. Все же приведем пример вычисления при помощи таблиц десятичных логарифмов. Пусть надо вычислить произведение $A = 830\,200 \times \times 0{,}0032$. Находим с помощью таблиц логарифмы множителей. Имеем

$$\log_{10} A = \log_{10} 830\,200 + \log_{10} 0{,}0032 =$$
$$= 5{,}9041744 + \overline{3},4800069 = 3{,}3841813.$$

Отсюда

$$A = a \cdot 10^3 = 10^3 \cdot 10^{0,3841813} = 10^3 \cdot 2{,}4220399 = 2422{,}0399.$$

В предпоследнем равенстве по мантиссе 0,3 841 813 находим число a.

Часто обозначают $\log_{10} a = \lg a$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В десятичной системе счисления задано положительное число A.

1) Что такое значащие цифры числа A?

2) Что такое число, заданное в стандартной форме? Дайте три примера приведения числа к стандартной форме.

3) Как найти характеристику и мантиссу десятичного логарифма числа?

2. С помощью микрокалькулятора вычислите lg числа 1) 3070, 2) 2003, 3) 0,75, 4) 0,00101, 5) 0,00032.

3. С помощью микрокалькулятора по полученным в предыдущей задаче логарифмам восстановите исходные числа. (Могут получиться не точно исходные числа, потому что вычисления ведутся приближенно.)

§ 4.8. Степенная функция

Функция вида

$$y = x^a \quad (0 < x < \infty),$$

где $a \neq 0$, называется *степенной функцией*. При любом a степенная функция во всяком случае определена для положительных x.

Степенная функция непрерывна, т. е. ее график есть непрерывная кривая.

Если a положительное, то функция $y = x^a$ определена также и при $x = 0$, именно — она равна нулю при $x = 0$, потому что в математике считают, что $0^\alpha = 0$ $(a > 0)$.

Попутно скажем, что 0^0 не есть число, не есть также число 0^a, где $a < 0$.

Таким образом, при $a > 0$ функция

$$y = x^a \qquad (0 \leqslant x < \infty)$$

определена не только для положительных x, но и для $x = 0$.

На рис. 81 даны графики степенных функций $y = x^p$ для некоторых значений p. Для $p > 0$ они равны нулю

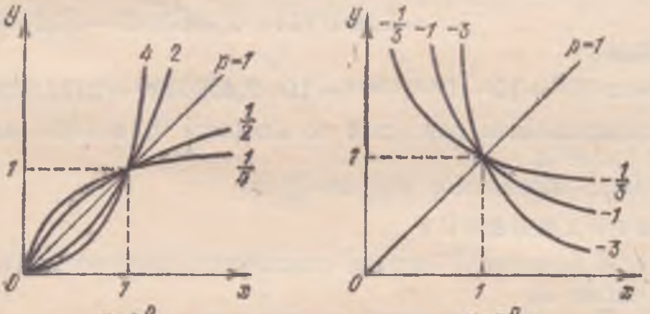

Рис. 81

при $x = 0$, поэтому их графики выходят из начала координат. При возрастании x от 0 до ∞ соответствующие ординаты y всех графиков возрастают тоже от 0 до ∞. Однако характер возрастания различный. Также очевидно, что

$$x^4 < x^2 < x < x^{1/2} < x^{1/4}, \qquad 0 < x < 1,$$

$$x^4 > x^2 > x > x^{1/2} > x^{1/4}, \qquad 1 < x < \infty.$$

Если $x = 1$, то $y = 1$ для всех графиков.

Функции x и $x^{1/3}$ можно рассматривать и для отрицательных x.

Что же касается функций $x^{1/2}$ и $x^{1/4}$, то они при $x<0$ не имеют для нас смысла, потому что не существует действительного числа, квадрат или четвертая степень которого равнялись бы отрицательному числу x. Среди комплексных чисел есть такие числа, но мы о них сейчас не говорим.

Выделим в особую группу степенные функции, соответствующие натуральным a ($a=1, 2, 3, \ldots$). Они определены и непрерывны на всей действительной оси x. На

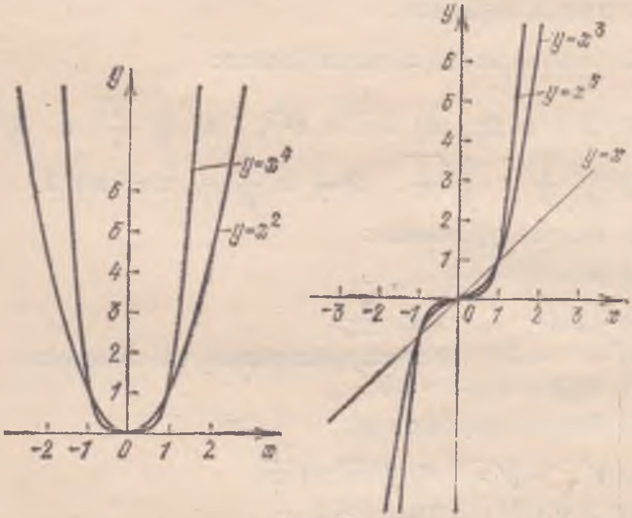

Рис. 82

рис. 82 даны графики функций действительного переменного x^2, x^4, x, x^3, x^5.

Степенную функцию можно записать в виде

$$y=x^a=b^{\log_b x^a}=b^{a\log_b x} \tag{29}$$

при любом положительном b $(b>0)$. Часто в качестве b берут неперово число e. Тогда формула (2) примет вид

$$y=x^a=e^{a\ln x}. \tag{29'}$$

Степенная функция x^a обладает следующим характерным для нее свойством:

$$(xy)^a=x^ay^a, \qquad 0<x,\ y<\infty. \tag{30}$$

Действительно,

$$(xy)^a = e^{a \ln (xy)} = e^{a \ln x + a \ln y} = e^{a \ln x} e^{a \ln y} = e^{\ln x^a} e^{\ln y^a} = x^a y^a.$$

Отметим, что степенная функция x^a при иррациональном a как функция действительного переменного для отрицательных x не имеет смысла. Более глубокое изучение показывает, что функция x^a при иррациональном a должна быть комплексной для отрицательных x. Однако на этом вопросе, относящемся к теории функций комплексного переменного, мы здесь останавливаться не можем.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какое из двух чисел больше:

а) $2^{\sqrt{2}}$ и 2^{π}, б) $3^{\frac{1}{1,7}}$ и $3^{\frac{1}{2,3}}$, в) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{1}{2}}$,
г) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, д) $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{\sqrt{7}}$, е) 7 и $\sqrt{7}$.

2. Решить уравнения:

а) $e^{4x} - 5e^{2x} + 6 = 0$,
б) $\log_5 (x-1) = \log_5 \frac{x}{1+x}$,
в) $4^{x-1} = 3^{3x}$ (прологарифмировать по основанию 4).
г) $\log_3 x + \log_x 3 = 2,5$.

3. Решить неравенства:

а) $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x}$, б) $\sqrt[3]{x} > \sqrt{x}$,
в) $\frac{3}{2} \log_2 \sqrt[3]{x} - 2 \log_4 x > 1$.